

INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Science and Technology
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
<b>Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)</b>
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12
Eksamensdag: Onsdag den 29. marts 2017, kl. 9.00-11.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort \_\_\_\_\_

Navn \_\_\_\_\_

Skriftlig Eksamen  
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Institut for Datalogi  
Aarhus Universitet

Onsdag den 29. marts 2017, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en mængde multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

Hvert delspørgsmål har præcist et rigtigt svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge **max ét svar** ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du  $-\frac{1}{k-1}$  point, hvor  $k$  er antal svarmuligheder.

For en opgave med vægt  $v\%$  og med  $n$  delspørgsmål, hvor du opnår samlet  $s$  point, beregnes din besvarelse af opgaven som:

$$\frac{s}{n} \cdot v \%$$

Bemærk at det er muligt at få negative point for en opgave.

### Opgave 1 (10 %)

I det følgende angiver  $\log n$  2-tals-logaritmen af  $n$ .

	Ja	Nej
$3n$ er $O(2n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^2$ er $O(n^2 \log n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\log n$ er $O(n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n \log n$ er $O(\sqrt{n})$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$7n + n^2$ er $O(7^n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$4^n$ er $O(2^{3n})$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$4n^2$ er $O(3n^3)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\sqrt{n}$ er $O(n^{1/3})$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\log n)^7$ er $O(n^7)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$7^n$ er $O((\log n)^7)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$4^{\log n}$ er $O(n^2)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1/n$ er $O(1/n^2)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$3n^2 + 7n^6$ er $O(10n^7)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$7^2$ er $O(1^7)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$3n^2$ er $O(2n^3)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n \log n$ er $O((\log n)^n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\log n)^{\log n}$ er $O(n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n \cdot n \cdot n \cdot n$ er $O(4n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$3^n$ er $O(7^n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$25n$ er $O(5n + 5n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### Opgave 2 (4 %)

Hvilke af følgende udsagn er sande for alle binære søgetræer med  $n$  elementer.

	Ja	Nej
Elementet i et blad er altid $\leq$ elementet i roden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Elementer med samme dybde i træet er sorteret fra venstre-mod-højre	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Længste rod-til-blad sti indeholder $O(\log n)$ knuder	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Hvis elementet i en knude har rang $r$ , så har elementet i det højre barn rang $r + 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Hvis man starter i roden og følger stien ved hele tiden at gå til højre, så kommer elementerne i voksende rækkefølge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 3 (10 %)**

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af  $n$  i  $O$ -notation.

**Algoritme Loop1( $n$ )**  
 $s = 1$   
**for**  $i = 1$  to  $n$   
      $s = s + 1$

**Algoritme Loop2( $n$ )**  
 $i = 1$   
 $j = n$   
**while**  $i \leq j$   
      $i = i * 2$   
      $j = j / 2$

**Algoritme Loop3( $n$ )**  
 $i = 1$   
**while**  $i \leq n$   
      $j = 1$   
     **while**  $j \leq n$   
          $j = j * 2$   
      $i = 2 * i$

**Algoritme Loop4( $n$ )**  
 $i = 1$   
**while**  $i \leq n$   
      $j = 1$   
     **while**  $j \leq i$   
          $j = j + 1$   
      $i = 2 * i$

**Algoritme Loop5( $n$ )**  
 $s = 0$   
 $i = 1$   
**while**  $i * i \leq n$   
     **for**  $j = 1$  to  $i$   
          $s = s + 1$   
      $i = i + 1$

**Algoritme Loop6( $n$ )**  
 $s = 0$   
**for**  $i = 1$  to  $n$   
     **for**  $j = i$  to  $n$   
         **for**  $k = i$  to  $j$   
              $s = s + 1$

	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n\sqrt{n})$	$O(\sqrt{n})$	$O((\log n)^2)$	$O(n^3)$
Loop1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 4 (4 %)**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	9	7	8	5	6	2	1	3	4

Angiv hvordan ovenstående binære max-heap ser ud efter HEAP-EXTRACT-MAX.

<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> <td style="padding: 2px 5px;">7</td> <td style="padding: 2px 5px;">8</td> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> <td style="padding: 2px 5px;">7</td> <td style="padding: 2px 5px;">8</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	4	9	7	8	5	6	2	1	3	<input type="checkbox"/>
1	2	3	4	5	6	7	8	9											
4	9	7	8	5	6	2	1	3											
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> <td style="padding: 2px 5px;">7</td> <td style="padding: 2px 5px;">8</td> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> <td style="padding: 2px 5px;">8</td> <td style="padding: 2px 5px;">7</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	8	7	3	5	6	2	1	4	<input type="checkbox"/>
1	2	3	4	5	6	7	8	9											
9	8	7	3	5	6	2	1	4											
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> <td style="padding: 2px 5px;">7</td> <td style="padding: 2px 5px;">8</td> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> <td style="padding: 2px 5px;">8</td> <td style="padding: 2px 5px;">7</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	<input type="checkbox"/>
1	2	3	4	5	6	7	8	9											
9	8	7	6	5	4	3	2	1											
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> <td style="padding: 2px 5px;">7</td> <td style="padding: 2px 5px;">8</td> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> <td style="padding: 2px 5px;">8</td> <td style="padding: 2px 5px;">7</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	8	7	4	5	6	2	1	3	<input type="checkbox"/>
1	2	3	4	5	6	7	8	9											
9	8	7	4	5	6	2	1	3											

**Opgave 5 (4%)**

Angiv den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 3, 5, 7, 2, 4, og 6 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

1	2	3	4	5	6	7	
7	5	6	1	2	3	4	<input type="checkbox"/>

1	2	3	4	5	6	7	
7	5	6	2	1	4	3	<input type="checkbox"/>

1	2	3	4	5	6	7	
7	6	5	4	3	2	1	<input type="checkbox"/>

1	2	3	4	5	6	7	
7	3	6	1	2	4	5	<input type="checkbox"/>

**Opgave 6 (4%)**

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	7	2	1	4	9	6	5	8

Angiv hvordan ovenstående array ser ud efter anvendelsen af BUILD-MAX-HEAP.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
7	4	9	8	3	2	6	5	1	<input type="checkbox"/>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
9	8	7	6	5	4	3	2	1	<input type="checkbox"/>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	<input type="checkbox"/>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
9	8	6	7	4	2	3	5	1	<input type="checkbox"/>

**Opgave 7 (4%)**

Betragt RADIX-SORT anvendt på nedenstående liste af tal ( $d = 4, k = 5$ ).

5555    0055    0005    0555    0000

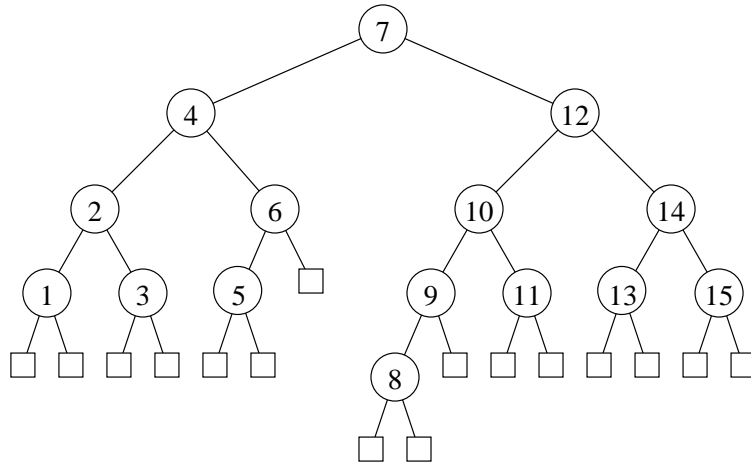
Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de tre mindst betydende cifre.

- |      |      |      |      |      |                          |
|------|------|------|------|------|--------------------------|
| 0000 | 0005 | 5555 | 0055 | 0555 | <input type="checkbox"/> |
| 0000 | 0005 | 0055 | 5555 | 0555 | <input type="checkbox"/> |
| 0000 | 0005 | 0055 | 0555 | 5555 | <input type="checkbox"/> |
| 0005 | 0000 | 0055 | 0555 | 5555 | <input type="checkbox"/> |
| 5555 | 0555 | 0055 | 0005 | 0000 | <input type="checkbox"/> |



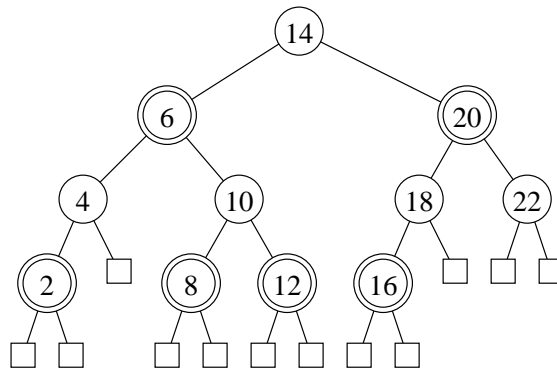
**Opgave 10 (4%)**

For hver af nedenstående delmængder, angiv om nedenstående binære træ er et lovligt rød-sort træ hvis netop disse knuder farves røde

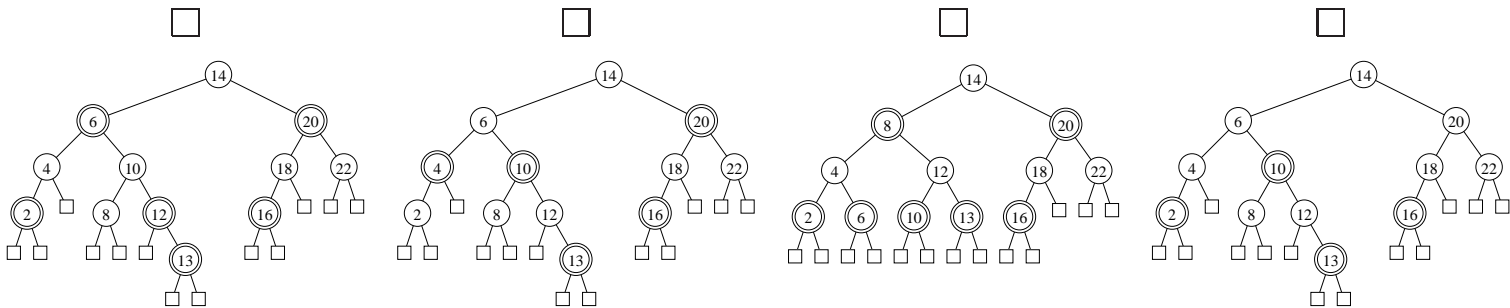


	Ja	Nej
5, 8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2, 5, 12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2, 5, 8, 12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2, 6, 8, 12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
∅	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 11 (4%)**



Angiv det resulterende rød-sortede træ når man indsætter 13 i ovenstående rød-sortede træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder).







**Opgave 14 (4%)**

I følgende hashtabel af størrelse 11 er anvendt *dobbelt hashing* med hashfunktionerne  $h_1(k) = (3k) \bmod 11$  og  $h_2(k) = 1 + (k \bmod 7)$ .

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		8		16					14	

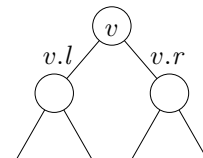
Angiv positionerne de tre elementer 3, 5 og 6 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 8, 16 og 14).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Insert(3)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(6)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 15 (4%)**

Betragt et søgetræ hvor hver knude  $v$  gemmer et tal  $v.x$ , og knuderne er ordnet venstre-mod-højre efter stigende  $v.x$ . Derudover gemmes i en knude  $v$  to værdier  $v.size$  og  $v.avg$ , som er henholdsvis antallet af elementer i  $v$ 's undertræ og gennemsnittet af alle tallene i  $v$ 's undertræ.

Angiv hvorledes  $v.size$  og  $v.avg$  kan beregnes når den tilsvarende information er kendt ved de to børn  $v.l$  og  $v.r$  (det kan antages at disse begge eksisterer).



$$v.size = \begin{cases} v.size + v.l.size + v.r.size & \square \\ 1 + v.l.size + v.r.size & \square \\ v.l.size + v.r.size & \square \\ 1 + (v.r.size - v.l.size) & \square \end{cases}$$

$$v.avg = \begin{cases} (v.x + v.l.avg + v.r.avg)/3 & \square \\ (v.x + v.l.avg * v.l.size + v.r.avg * v.r.size)/v.size & \square \\ (v.x + v.l.avg + v.r.avg)/v.size & \square \\ v.x + (v.l.avg + v.r.avg)/2 & \square \end{cases}$$

**Transitionssystem Sqrt**

Konfigurationer:  $\{[x, \ell, h] \mid \text{heltal } x, \ell, h \geq 0\}$

$[x, \ell, h] \triangleright [x, \ell + 1, h]$  **if**  $(\ell + 1)^2 \leq x$

$[x, \ell, h] \triangleright [x, \ell, h - 1]$  **if**  $x < h^2$

**Opgave 16 (4%)**

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem Sqrt. Startkonfigurationen antages at være  $[x_0, 0, x_0]$ , hvor  $x_0 \geq 0$ .

	Ja	Nej
$\ell \leq \sqrt{x}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\sqrt{x} \leq h$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$h = x$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$h \leq x$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\ell \leq \sqrt{x} < h$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 17 (4%)**

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem Sqrt. Startkonfigurationen antages at være  $[x_0, 0, x_0]$ , hvor  $x_0 \geq 0$ .

	Ja	Nej
$\mu(x, \ell, h) = h$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, \ell, h) = x - \ell$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, \ell, h) = h - \ell$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, \ell, h) = h - \lfloor \sqrt{x} \rfloor$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, \ell, h) = (h - \ell)^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 18 (4%)**

For QuickSort og InsertionSort angiv worst-case, best-case, og forventet udførelstid for input af størrelse  $n$ . Forventet tid er her forventet tid for en tilfældig permutation af input.

	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$
QuickSort, worst-case	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
QuickSort, best-case	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
QuickSort, forventet	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
InsertionSort, worst-case	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
InsertionSort, best-case	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
InsertionSort, forventet	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Givet et array  $A[1..n]$  indeholdende  $n \geq 1$  heltal og et heltal  $x$ , så identificerer nedenstående algoritme antallet af forekomster af  $x$  i  $A$ , dvs. beregner

$$\text{count}(x, A) = |\{i \mid 1 \leq i \leq n \wedge A[i] = x\}|.$$

**Algoritme** COUNT( $x, A$ )

Inputbetingelse : Heltal  $x$  og array  $A[1..n]$  med  $n$  heltal

Outputkrav :  $r = \text{count}(x, A)$

Metode :  $i \leftarrow 0$ ;

$r \leftarrow 0$ ;

{ $I$ } **while**  $i < n$  **do**

$i \leftarrow i + 1$

**if**  $x = A[i]$  **then**

$r \leftarrow r + 1$

### Opgave 19 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant  $I$  for ovenstående algoritme COUNT.

	Ja	Nej
$i \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = \text{count}(x, A[1..i])$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = \text{count}(x, A[1..i + 1])$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i < n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### Opgave 20 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme COUNT.

	Ja	Nej
$\mu(i, r, n) = n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, r, n) = i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, r, n) = n - r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, r, n) = n^2 - i^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, r, n) = 2n - i - r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 21 (4%)**

Givet ikke negative heltal  $x$  og  $p$ , så beregner nedenstående algoritme  $x^p$ .

```
Algoritme POWER( $x, p$ )  
Inputbetingelse : Heltal  $x \geq 0$  og  $p \geq 0$   
Outputkrav      :  $r = x^p$   
Metode          :  $r \leftarrow 1$ ;  
                   $\{I\}$  while  $p \geq 1$  do  
                    if  $p$  lige then  
                       $x \leftarrow x * x; p \leftarrow p/2$   
                    else  
                       $r \leftarrow r * x; p \leftarrow p - 1$ 
```

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant  $I$  for ovenstående algoritme POWER, hvor  $x_0$  og  $p_0$  angiver de initielle værdier af  $x$  og  $p$ .

	Ja	Nej
$p \leq p_0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x^p = r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x \leq x_0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r \cdot x_0^{p_0} = x^p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x_0^{p_0} = r \cdot x^p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 22 (4%)**

Givet en sorteret liste  $L$  med  $N = 2^k - 1$  elementer, for et positivt heltal  $k$ , så kan man i  $O(N)$  tid konstruere et perfekt balanceret binært søgetræ indeholdende  $L$ . I det følgende antages at vi kun laver sletninger i søgetræet, som beskrevet i [CLRS, kapitel 12.3], dvs. sletninger forsøger ikke at holde træet balanceret. Lad  $n$  betegne det aktuelle antal elementer i træet. For at holde træets højde logaritmisk i  $n$ , genopbygges træet som et perfekt balanceret binært søgetræ i  $O(n)$  tid når halvdelen af elementerne er blevet slettet, dvs. når  $n < N/2$ , hvor  $N$  betegner antallet af elementer i træet sidste gang det blev genopbygget.

Med en passende potentialefunktion kan man argumentere for at slettelser tager amortiseret  $O(\log n)$  tid. Angiv for hver af nedenstående om dette er en sådan potentialefunktion  $\Phi$ .

	Ja	Nej
$N$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$N - n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(N - n) \log n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\log n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>