

DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
<b>Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)</b>
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12 (tolv)
Eksamensdag: Fredag den 1. april 2005, kl. 9.00-11.00
Eksamenslokale: Trøjborgkomplekset, lokale 139, Niels Juelsgade 84, 8200 Århus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater)
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN  
BEGYNDER  
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Skriftlig Eksamen  
Algoritmer og Datastrukturer 1

Datalogisk Institut  
Aarhus Universitet

Fredag den 1. april 2005, kl. 9.00–11.00

Navn \_\_\_\_\_

Årskort \_\_\_\_\_

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge ét svar ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et korkert svar, får du  $-\frac{1}{k-1}$  point, hvor  $k$  er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt  $v\%$  og med  $n$  delspørgsmål, hvor du opnår samlet  $s$  point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max \left\{ 0, \frac{s}{n} \right\} \cdot v \%$$

(Opgavesættet fortsætter)

**Opgave 1 (4%)**

	Ja	Nej
$n \cdot \log n$ er $O(n^{3/2})$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^{1/10}$ er $O(\log n)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$3n^2 + 7n$ er $O(10n^2)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n(\sqrt{n} + \log n)$ er $O(n^{3/2})$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^2$ er $\Omega(n^3)$ ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 2 (4%)**

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til  $O$ -notationen:

$$\begin{aligned} & n^2 \\ & n \cdot (\log n)^2 \\ & n \cdot \sqrt{n} \\ & 3^n / n^2 \\ & n + (\log n)^4 \end{aligned}$$

Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 3 (4%)**

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af  $n$  i  $O$ -notation.

**Algoritme Loop1( $n$ )**  
 $x \leftarrow 0$   
**for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $n$  **do**  
    **for**  $j \leftarrow i$  **to**  $n$  **do**  
         $x \leftarrow x + j$

**Algoritme Loop2( $n$ )**  
 $x \leftarrow 0$   
**for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $n$  **do**  
    **for**  $j \leftarrow 1$  **to**  $n$  **do**  
        **for**  $k \leftarrow i$  **to**  $j$  **do**  
             $x \leftarrow x + i + j + k$

**Algoritme Loop3( $n$ )**  
 $i \leftarrow 1$   
 $j \leftarrow 1$   
**while**  $i \leq n$  **do**  
    **if**  $j \leq i$  **then**  
         $j \leftarrow j * 2$   
    **else**  
         $i \leftarrow i + 1$   
         $j \leftarrow 1$

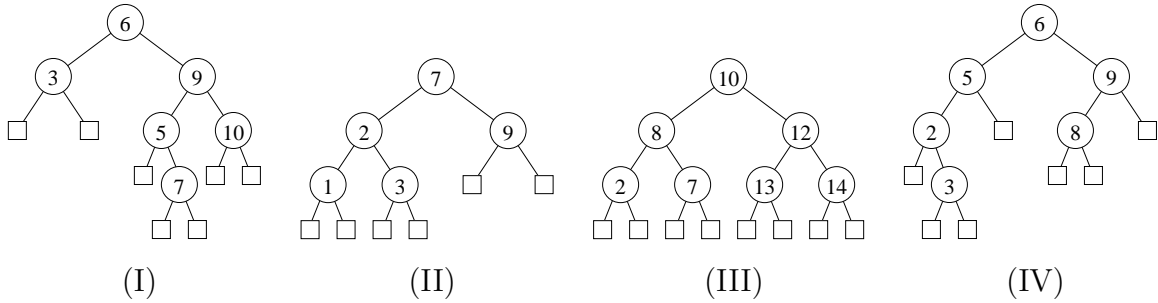
Svar Loop1: \_\_\_\_\_

Svar Loop2: \_\_\_\_\_

Svar Loop3: \_\_\_\_\_

**Opgave 4 (4%)**

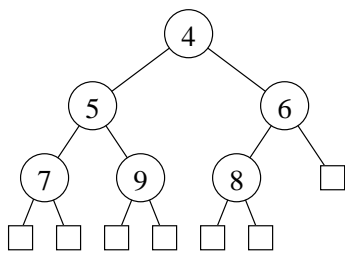
Angiv for hver af nedenstående binære træer om det er et lovligt ubalanceret binært søgetræ eller et lovligt AVL-træ.



	Ikke et søgetræ	Søgetræ men ikke et AVL-træ	AVL-træ
(I)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(II)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(III)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(IV)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 5 (4%)**

Tegn hvordan nedenstående binære heap ser ud efter indsættelse af elementet 2.



Svar: \_\_\_\_\_

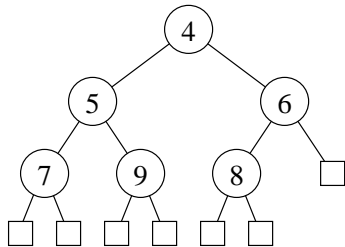
**Opgave 6 (4%)**

Tegn den binære heap efter indsættelse af elementerne 4, 6, 8, 5, 7, 2 i en heap i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 7 (4%)**

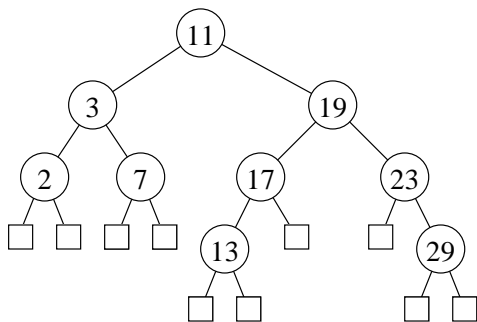
Tegn hvordan nedenstående binære heap ser ud efter en removeMin operation.



Svar: \_\_\_\_\_

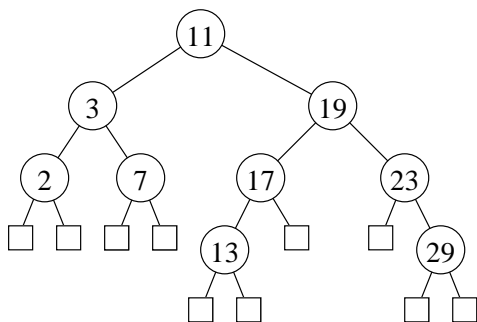
**Opgave 8 (4%)**

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 15.



Svar: \_\_\_\_\_

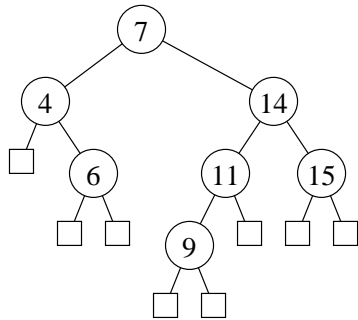
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 19.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 9 (4%)**

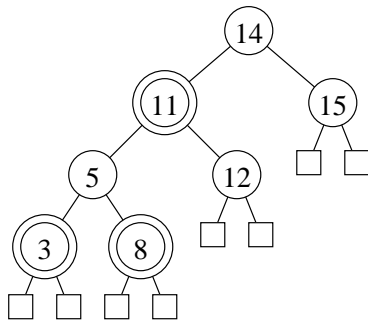
Tegn hvordan nedenstående AVL-træ ser ud efter indsættelse af elementet 10.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 10 (4%)**

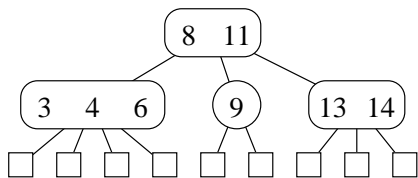
Tegn hvordan nedenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 10.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 11 (4%)**

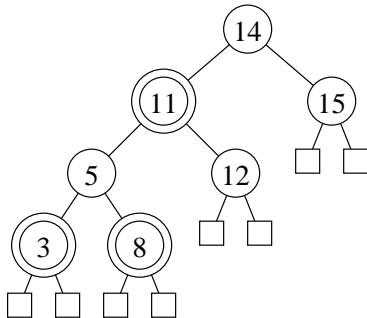
Tegn hvordan nedenstående (2,4)-træ ser ud efter indsættelse af elementet 5.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 12 (4%)**

Nedenstående er et rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder). Tegn det korre-  
 sponderende (2,4)-træ.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 13 (4%)**

Nedenstående er en hashtabel hvor der er anvendt *quadratic probing*. Den anvendte  
 hashfunktion er  $h(k) = k \bmod 17$ . Tegn hvordan hashtabellen ser ud efter at  $k = 26$   
 og  $k = 43$  indsættes i den givne rækkefølge.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
					39	5			22							

Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 14 (4%)**

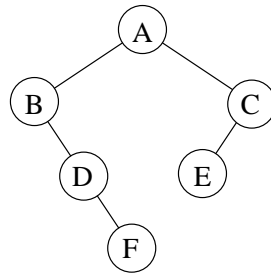
Nedenstående er en hashtabel hvor der er anvendt *linear probing*. Den anvendte hash-  
 funktion er  $h(k) = k \bmod 13$ . Tegn hvordan hashtabellen ser ud efter at  $k = 5$  slettes  
 fra hashtabellen (der må ikke bruges dummy elementer).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
					18	5	7	44	20	23		

Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 15 (4%)**

Angiv for hver af nedenstående sekvenser om den angiver et preorder, postorder, eller et inorder gennemløb af nedenstående binære træ.



	Preorder	Postorder	Inorder	Hverken preorder, postorder, eller inorder
A B C D E F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F D B E C A	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B D F A E C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A B D F C E	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B D F C E A	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 16 (4%)**

Tegn fire træer hvor et postorder gennemløb giver: A B C D

Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 17 (4%)**

Betragt radix-sort anvendt på nedenstående liste af tal ( $d = 3$ ,  $N = 10$ ). Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de to mindst betydende cifre.

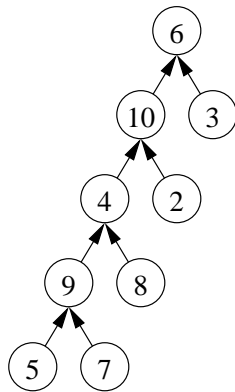
133 534 234 204 100 566

Svar: \_\_\_\_\_



**Opgave 18 (4%)**

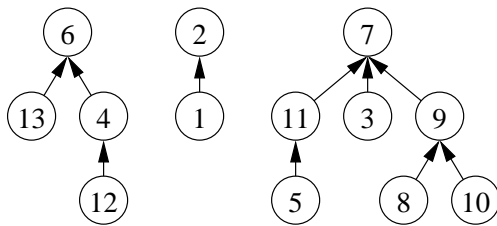
Tegn hvordan nedenstående union-find datastruktur ser ud efter  $\text{FIND}(9)$ , når der anvendes stikomprimering.



Svar: \_\_\_\_\_

**Opgave 19 (4%)**

Tegn hvordan nedenstående union-find datastruktur ser ud efter  $\text{UNION}(2,7)$  efterfulgt af  $\text{UNION}(6,7)$ , når der anvendes union-by-size heuristikken.



Svar: \_\_\_\_\_

**Transitionssystem** Euklid3( $i, j, k$ )  
Configurations:  $\{[i, j, k] \mid i, j, k \geq 1\}$

$[i, j, k] \triangleright [i, j - i, k]$	<b>if</b>	$i < j$
$[i, j, k] \triangleright [i, j, k - i]$	<b>if</b>	$i < k$
$[i, j, k] \triangleright [i - j, j, k]$	<b>if</b>	$j < i$
$[i, j, k] \triangleright [i, j, k - j]$	<b>if</b>	$j < k$
$[i, j, k] \triangleright [i - k, j, k]$	<b>if</b>	$k < i$
$[i, j, k] \triangleright [i, j - k, k]$	<b>if</b>	$k < j$

**Opgave 20 (4%)**

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem Euklid3. Startkonfigurationen antages at være  $[i_0, j_0, k_0]$ .

	Ja	Nej
$i \leq j \leq k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j \geq 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i \cdot k \cdot j > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\text{gcd}(i, j, k) = \text{gcd}(i_0, j_0, k_0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\min\{i_0, j_0, k_0\} \leq \min\{i, j, k\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 21 (4%)**

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem Euklid3.

	Ja	Nej
$\mu(i, j, k) = i \cdot j \cdot k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, k) = i \cdot j + k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, k) = \min\{i, j, k\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, k) = \max\{i, j, k\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, k) = i + j + k$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Algoritme** Loop( $n$ )  
Inputbetingelse : heltal  $n \geq 1$   
Outputkrav : –  
Metode :  $i \leftarrow 1$ ;  
           $j \leftarrow 1$ ;  
          { $I$ } **while**  $i + j < n$  **do**  
                   $i \leftarrow i + 1$ ;  
                   $j \leftarrow j + i$

**Opgave 22** (4%)

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant  $I$  for ovenstående algoritme Loop.

	Ja	Nej
$1 \leq i + j \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i \leq j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j = i^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$j = (i + 1)i/2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 23** (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Loop.

	Ja	Nej
$\mu(i, n) = i + j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = n - i - j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = \log n - \log i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = j - 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Opgave 24 (4%)**

Nedenstående algoritme beregner  $r = \lfloor n/m \rfloor$ . For at vise gyldigheden af algoritmen skal  $I_n$ ,  $I_m$  og  $I_r$  være invarianter omkring variablerne  $n$ ,  $m$  og  $r$ . Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke).

```
Algoritme Div( $n, m$ )  
Inputbetingelse : heltal  $n, m \geq 1$   
Outputkrav      :  $r = \lfloor n/m \rfloor$   
Metode          :  $r = 0$ ;  
                   $\{I_n \wedge I_m \wedge I_r\}$  while  $n \geq m$  do  
                     $n \leftarrow n - m$ ;  
                     $r \leftarrow r + 1$ 
```

Svar  $I_n$ : \_\_\_\_\_

Svar  $I_m$ : \_\_\_\_\_

Svar  $I_r$ : \_\_\_\_\_

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar  $\mu$ : \_\_\_\_\_

**Opgave 25 (4%)**

Betragt en stak som understøtter  $\text{push}(x)$  og  $\text{pop}()$  i  $O(1)$  worst-case tid. Betragt nu stakken udvidet med operationen  $\text{multi\_pop}(k)$ , der fjerner de  $k$  øverste elementer på stakken ved  $k$  gange at kalde  $\text{pop}()$ . Stakstørrelsen før en operation betegner vi  $n$  og vi antager at  $1 \leq k \leq n$ .

For at argumentere at operationerne  $\text{push}$ ,  $\text{pop}$  og  $\text{multi\_pop}$  tager  $O(1)$  *amortiseret tid*, kræves en passende potentiale funktion. For hver af nedenstående funktioner, angiv om de kan anvendes som en potentiale funktion for et sådant argument.

	Ja	Nej
$\Phi(n) = n^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\Phi(n) = \log n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\Phi(n) = \sqrt{n}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\Phi(n) = n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\Phi(n) = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>