INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Science and Technology
EKSAMEN
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 11 (elleve)
Eksamensdag: Fredag den 27. juni 2014, kl. 9.00-13.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

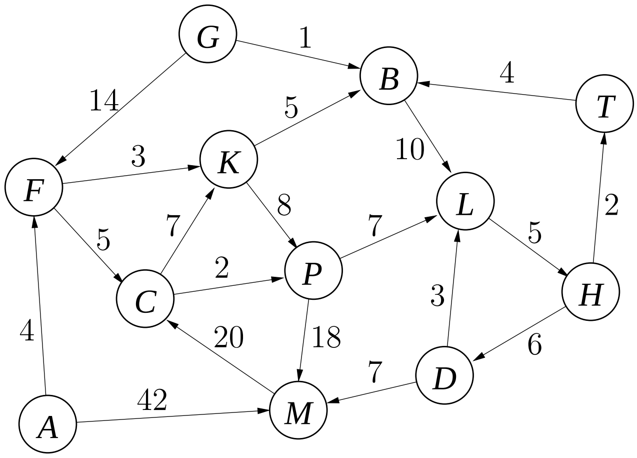
OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Bemærk: *Bagerst i eksamenssættet findes sider til at angive svarene til opgave 1 på og som afleveres som del af eksamensbesvarelsen.*

Betragt nedenstående vægtede orienterede graf. Det antages, at grafen er givet ved *incidenslister*, hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.

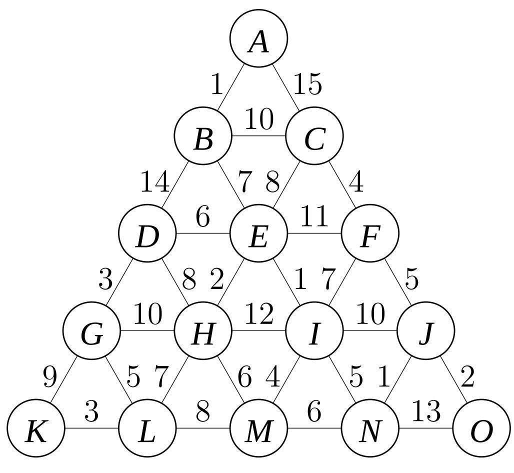


Spørgsmål a: Angiv et BFS-træ for ovenstående graf, hvor BFS-gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i BFS-træet, BFS-numrene for knuderne, og rækkefølgen knuderne bliver indsat i køen Q i BFS-algoritmen. □

Spørgsmål b: Angiv et DFS-træ for ovenstående graf, hvor DFS-gennemløbet starter i knuden A, og en DFS-nummerering af knuderne. Angiv for hver knude "discovery time" og "finishing time". □

Spørgsmål c: Angiv et korteste veje (SSSP) træ for ovenstående graf, når korteste veje beregningen sker med hensyn til startknuden A. For hver knude v angiv også afstanden fra startknuden A til v. □

Spørgsmål d: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf. For hver komponent angiv knuderne i komponenten. □



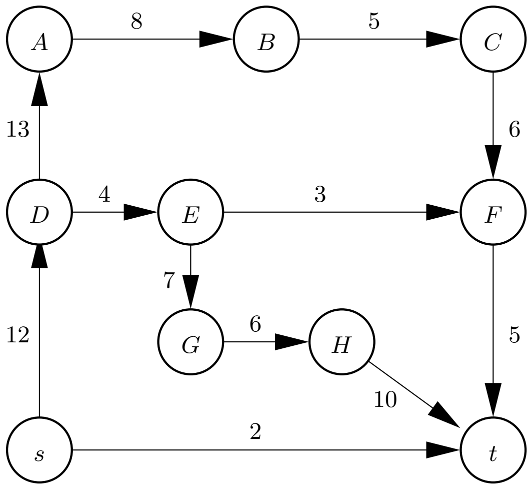
Spørgsmål e: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ (MST) for ovenstående uorienterede graf med vægte på kanterne. Angiv i hvilken rækkefølge knuderne bliver taget ud af prioritetskøen Q i Prim's algoritme, når denne starter i knuden A. □

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 2 (15%)

Bemærk: *Bagerst i eksamenssættet findes en side til at angive svarene til opgave 2 på og som afleveres som del af eksamensbesvarelsen.*

Betragt nedenstående netværk med de angivne kapaciteter på kanterne.



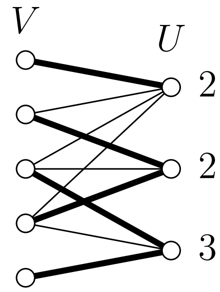
Spørgsmål a: Angiv en maksimal strømning (maximum flow) fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv værdien af en maksimal strømning, og angiv et snit (cut) (dvs. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig værdien af en maksimal strømning. □

Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maksimal strømning. Angiv de forbedrende stier (augmenting paths) der anvendes under udførslen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen, man forbedrer med, langs stien. □

Opgave 3 (20%)

Betragt en todelt graf $G = (V \cup U, E)$, hvor V og U er to disjunkte mængder af knuder og $E \subseteq V \times U$ er en mængde af uorienterede kanter mellem knuder i V og U. Vi ønsker at finde en *generaliseret parring* M (delmængde af kanterne E) mellem knuderne i V og U, således at en knude v i V højst kan være parret med én knude i U, og en knude u i U højst kan være parret med d_u knuder i V, hvor vi som del af input har givet en øvre grænse d_u for hver knude u i U.

Nedenfor vises en generaliseret maksimal parring for en graf med $|V| = 5$, $|U| = 3$, og hvor der for hver knude i U er angivet d_u. De fede kanter udgør en mulig generaliseret maximal parring af størrelse 5.

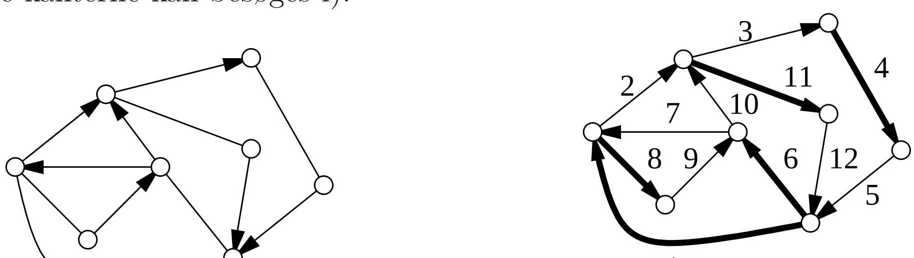


Spørgsmål a: Beskriv en algoritme til at finde en maksimal generaliseret parring i en todelt graf. Angiv algoritmens udførselstid. □

Det er velkendt at en stærkt sammenhængende orienteret graf har en Euler tour (dvs. en cykel der indeholder alle kanter præcis én gang) hvis og kun hvis enhver knude har lige mange udgående og indgående kanter.

I det følgende betrager vi *blandede grafer*, hvilket er grafer hvor nogle kanter er orienterede og andre er uorienterede. Vi antager at graferne er sammenhængende, dvs. hvis vi ignorerer orienteringen på alle orienterede kanter, så er graferne sammenhængende.

Vi ønsker at afgøre om vi kan tildele en orientering til alle de uorienterede kanter, således at grafen har en Euler tour. F.eks. kan nedenstående blandede graf (venstre) tildeles en orientering (højre), således at der er en Euler tour (tallene på kanterne angiver en rækkefølge kanterne kan besøges i).



Spørgsmål b: Angiv en algoritme til at afgøre om der findes en Euler tour i en sammenhængende blandet graf G med m kanter. Angiv algoritmens udførselstid. (Hint: betragt en todelt graf hvor knuder i den ene side er kanter i G og knuderne i den anden side er knuderne i G). □

Opgave 4 (20%)

En streng er et palindrom, hvis strengen læst bagfra er identisk med strengen læst forfra. F.eks. er `aibohphobia` et palindrom.

I denne opgave ønsker vi givet en streng T af længde n, at finde det minimale antal tegn man skal indsætte i strengen for at opnå et palindrom. Da T konkateneret med $T[1..n-1]$ læst bagfra altid er et palindrom (f.eks. bliver `abc` til `abcba`), ved vi at man højest behøver $n-1$ tegn. Ofte kan man dog bruge færre tegn. F.eks. kan `abca` blive til palindromet `abcba` ved kun at indsætte et enkelt `b`.

Vi lader $C(i,j)$ betegne den mindste antal tegn der skal indsættes for at gøre $T[i..j]$ til et palindrom. Hvis $j < i$ definerer vi $T[i..j]$ til at være den tomme streng og $C[i,j] = 0$. F.eks. for strengen $T =$ `bcabcaba` har vi $C(3,6) = 1$, da der kun skal indsættes ét tegn for at gøre $T[3..6] =$ `abca` til et palindrom.

$C(i,j)$ kan bestemmes ved følgende rekursionsformel.

$$C(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } j \leq i \\ C(i+1, j-1) & \text{hvis } i < j \text{ og } T[i] = T[j] \\ 1 + \min\{C(i+1,j), C(i,j-1)\} & \text{hvis } i < j \text{ og } T[i] \neq T[j] \end{cases}$$

Spørgsmål a: Udfyld nedenstående tabel for strengen $T =$ `ibfoi`.

$C(i,j)$	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

□

Spørgsmål b: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet en streng T af længde n, beregner $C(1,n)$. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen fra spørgsmål b) til at udskrive et kortest mulig palindrom, som indeholder strengen T som en delsekvens. Angiv algoritmens udførselstid.

□

Opgave 5 (20%)

Givet en streng S og et heltal $k \geq 1$, definerer vi den k'te *skalering* af S til at være strengen hvor hvert tegn i S erstattes af k sammenhængende forekomster af tegnet. Formelt, $\text{scale}_k(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m) = \sigma_1^k\sigma_2^k\cdots\sigma_m^k$, hvor hvert σ_i er et tegn fra et alphabet Σ og σ^k angiver strengen af længde k indeholdende k σ-er. Bemærk at $\text{scale}_1(S) = S$.

Eksempel: $\text{scale}_3(\texttt{abbca}) = \texttt{aaabbbbbbcccaaa}$.

I denne opgave ønsker vi at finde forekomster af skaleringer af et mønster P i en tekst T. F.eks. forekommer $P = \texttt{acba}$ som $\text{scale}_2(P)$ i $T = \texttt{bcaa}\underline{\texttt{aaccbbaa}}\texttt{abbcaa}$ på position 5.

Spørgsmål a: Angiv for nedenstående P og T hvilke skaleringer k, der er en forekomst af $\text{scale}_k(P)$ i T. For disse k angiv også alle positioner i T hvor $\text{scale}_k(P)$ forekommer.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$P =$ a b c a	$T =$	c	a	b	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	c	c	a	a	b	c	a

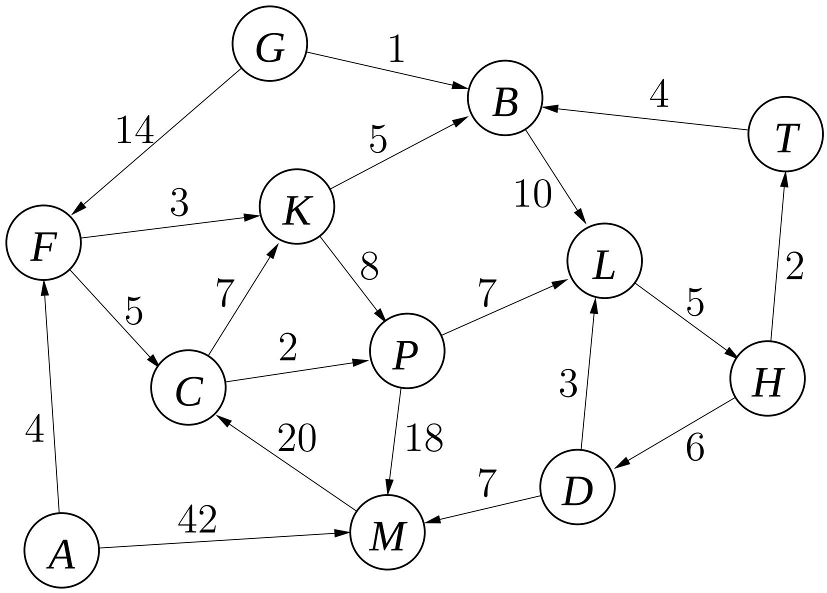
□

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der givet et mønster P af længde m og en streng T af længde n, hvor $n \geq m \geq 1$, rapporterer alle $k \geq 1$, hvor $\text{scale}_k(P)$ forekommer i T. Angiv algoritmens udførselstid. En ideel løsning opnår udførselstid $O(n \log n)$ (Hint: $\sum_{i=1}^{n} 1/i = O(\log n)$). □

Årskort:	Navn:

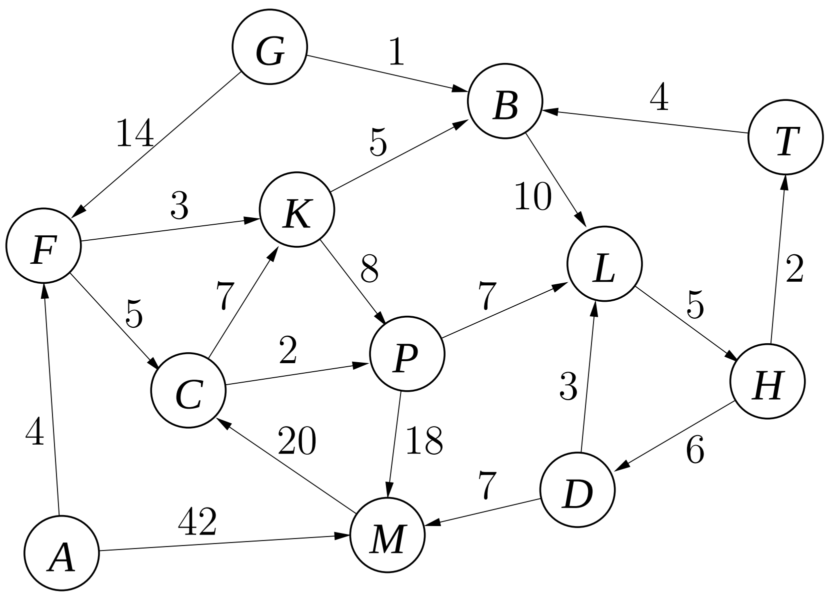
Opgave 1 — Svar

Spørgsmål a: BFS



Indsættelser i Q: ____

Spørgsmål b: DFS

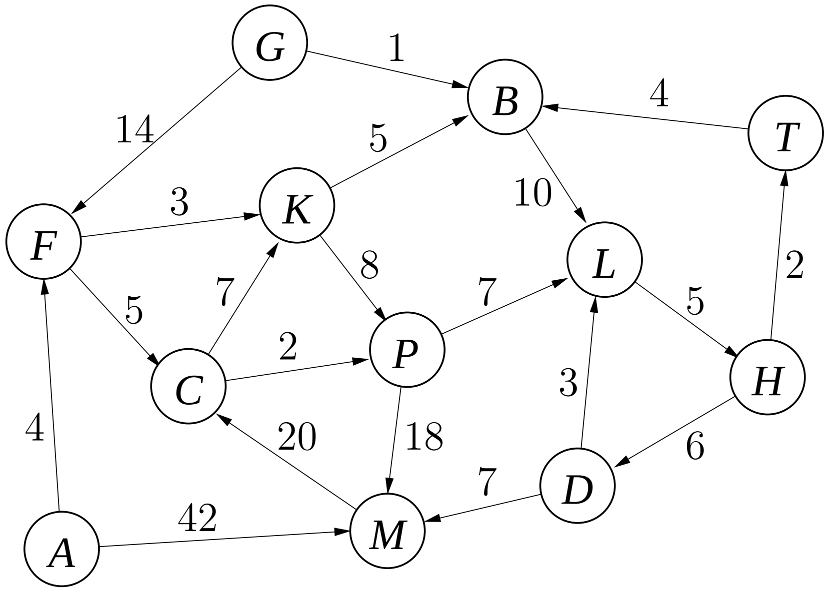


(blank side)

Årskort:	Navn:

Opgave 1 — Svar

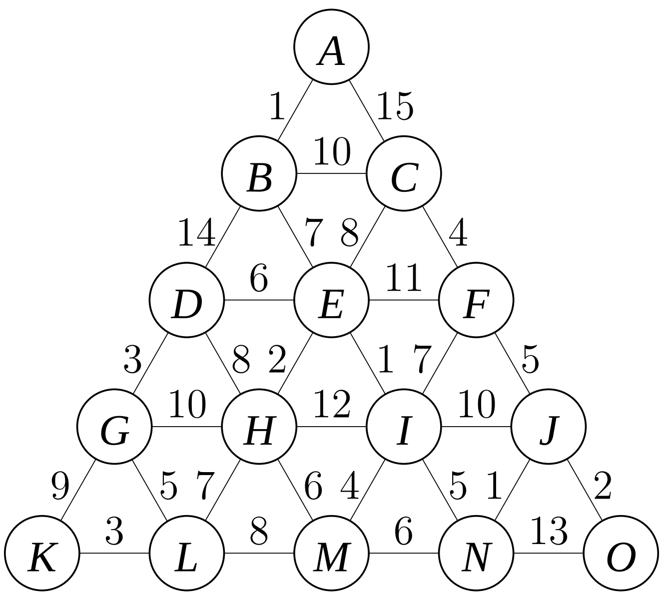
Spørgsmål c: SSSP



Spørgsmål d:

Stærke sammenhængskomponenter: ____________________

Spørgsmål e: MST



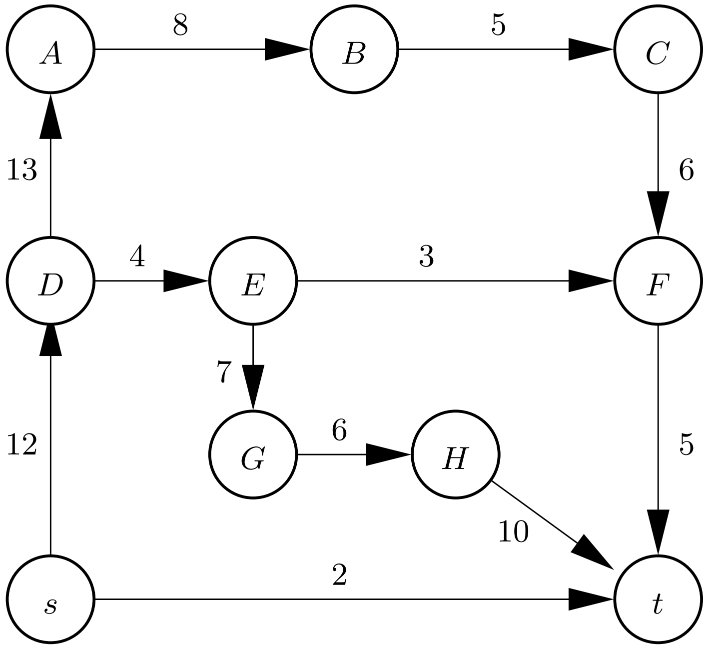
Udtagelse fra Q: ____________________

(Opgavesættet fortsætter)

(blank side)

Opgave 2 — Svar

Spørgsmål a:



Værdien af strømning: ______________________

Minimal snit: ______________________

Spørgsmål b:

Forbedring	Forbedrende sti