DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

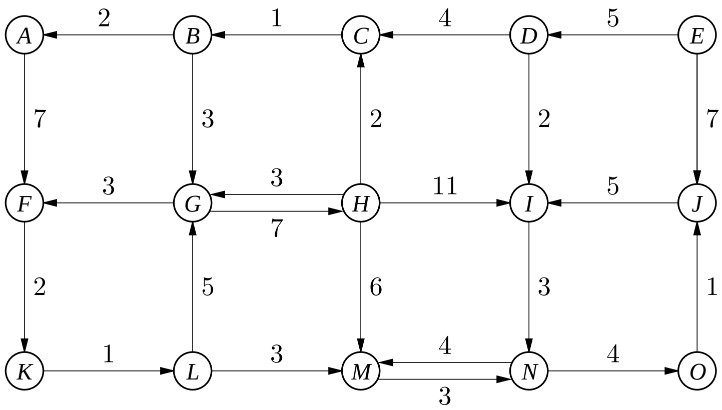
Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 6 (seks)
Eksamensdag: Fredag den 21-8-2009, kl. 9.00-13.00
Eksamenslokale: Trøjborg, Willemoesgade 15, Århus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Betragt nedenstående orienterede graf med ikke-negative vægte på kanterne. Det antages at grafen er givet ved incidenslister hvor incidenslisterne er sorteret alfabetisk.



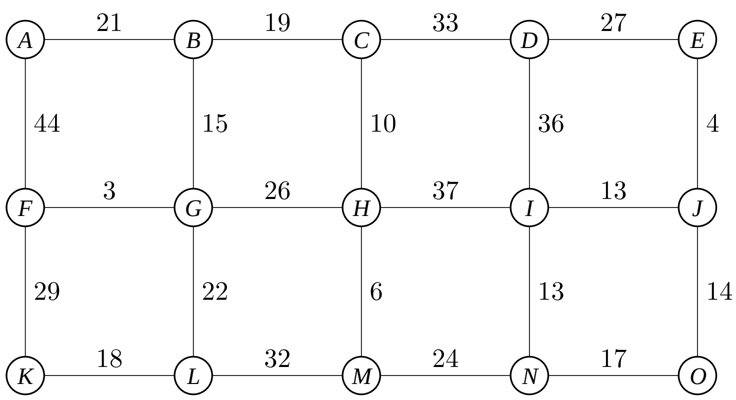
Spørgsmål a: Angiv et BFS træ for ovenstående graf, når BFS gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i BFS træet og BFS numrene for knuderne. □

Spørgsmål b: Angiv et DFS træ for ovenstående graf, når DFS gennemløbet starter i knuden A, og en DFS nummerering af knuderne. Angiv for hver knude "discovery time" og "finishing time". □

Spørgsmål c: Angiv et korteste veje træ for ovenstående graf, når korteste veje beregningerne sker med hensyn til startknuden A. For hver knude v angiv også afstanden fra startknuden A til v. □

Spørgsmål d: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf. □

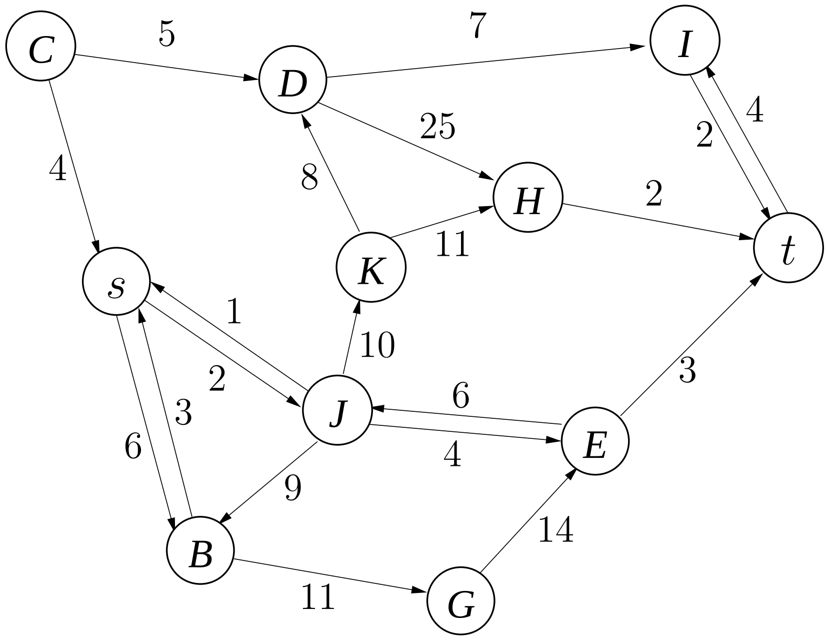
Betragt nu følgende uorienterede graf med vægte på kanterne.



Spørgsmål e: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ for ovenstående graf. □

Opgave 2 (15%)

Betragt nedenstående netværk med de angivne kapaciteter på kanterne.



Spørgsmål a: Angiv en maksimal strømning fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv værdien af en maksimal strømning, og angiv et snit (dvs. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig en maksimal strømning. □

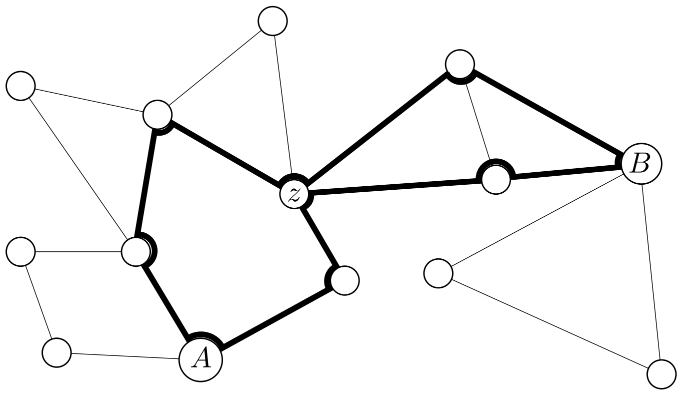
Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maksimal strømning. Angiv de forbedrende stier der anvendes under udførslen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen man forbedrer med langs stien. □

Opgave 3 (20%)

I denne opgaver betragter vi en uorienteret graf $G = (V, E)$ med $|V| = n$ knuder og $|E| = m$ kanter. Lad A og B være to knuder i G. Vi ønsker at finde en simpel cykel i G som går igennem både A og B.

Spørgsmål a: Beskriv en algoritme der afgør om der findes en cykel i grafen, som indeholder både A og B. En ***kant*** i E må højst indgå én gang i cyklen (men en knude må gerne indgå flere gange). Angiv algoritmens udførselstid. (Hint: Anvend en maksimal strømnings algoritme) □

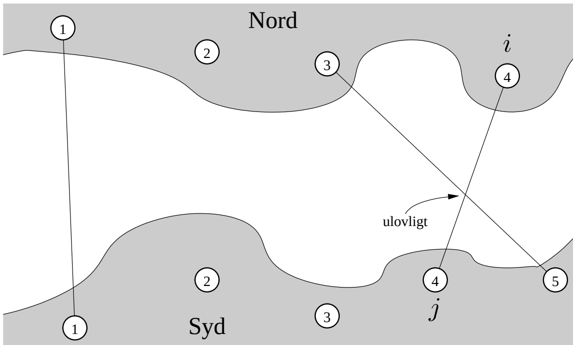
Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der afgør om der findes en cykel i grafen, som indeholder både A og B. En ***knude*** i V må højst indgå én gang i cyklen. Angiv algoritmens udførselstid. □



Ovenstående cykel er en lovlig cykel indeholdende A og B til spørgsmål a, hvoridmod det ikke er en lovlig cykel i spørgsmål b da knuden z indgår to gange i cyklen.

Opgave 4 (20%)

I denne opgave ønsker vi at bygge broer over en flod. På den nordlige bred af floden ligger n byer og på den sydlige bred ligger der m byer. For at bygge en bro mellem by i på den nordlige bred og by j på den sydlige bred kræves at hverken i eller j allerede har en bro og broen (i, j) ikke vil krydse en allerede eksisterende bro, dvs. at der ikke findes en bro (i', j') med $i' < i$ og $j' > j$, eller $i' > i$ og $j' < j$. Hver mulig bro (i, j) har en værdi $V(i, j)$. Vi ønsker at finde en lovlig mængde af broer der har størst mulig samlet værdi (en mulig bro kan også have en negativ værdi, men vil så naturligvis ikke indgå i en løsning til vores problem).



$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	2	-3	-1	4	4
2	4	2	4	2	-1
3	-3	-1	5	4	1
4	-2	1	-1	3	2

For $0 \leq i \leq n$ og $0 \leq j \leq m$ lader vi $X(i, j)$ betegne maksimale værdi for en mængde af broer der kun forbinder byer der er blandt de i første byer på den nordlige bred og de j første byer på den sydlige bred. $X(i, j)$ kan beskrives ved følgende rekursionsformel:

$$X(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{hvis} \quad i = 0 \lor j = 0 \\ \max\{X(i-1,j), X(i,j-1)\} & \text{hvis} \quad i \geq 1 \land j \geq 1 \land V(i,j) \leq 0 \\ \max\{X(i-1,j-1) + V(i,j), X(i-1,j), X(i,j-1)\} & \\ & \text{hvis} \quad i \geq 1 \land j \geq 1 \land V(i,j) > 0 \end{cases}$$

Spørgsmål a: Udfyld for ovenstående eksempel indgangene i nedenstående tabel for $X(i, j)$.

$X(i,j)$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						

$\square$

Spørgsmål b: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet V, beregner den største værdi en mængde af broer kan opnå. Angiv algoritmens udførselstid. $\square$

Spørgsmål c: Udvid algoritmen fra spørgsmål b) til, givet V, at rapportere en mængde af broer med størst mulig værdi. Angiv algoritmens udførselstid. $\square$

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 5 (20%)

For en streng $U = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ betegner *rotationen* af U med *skift* i strengen $x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_n x_1 x_2 \cdots x_i$, hvor $0 \leq i < n$. F.eks. har strengen `BBCABA` følgende rotationer:

Skift	Streng
0	`BBCABA`
1	`BCABAB`
2	`CABABB`
3	`ABABBC`
4	`BABBCA`
5	`ABBCAB`

Vi ønsker at finde den leksikografisk mindste streng der er en rotation af U, dvs. rotationen `ABABBC` med skift 3 i ovenstående eksempel.

Spørgsmål a: Angiv for strengen

$$U = \texttt{ABCABBAB}$$

den leksikografisk mindste rotation. Angiv både skiftet og den roterede streng. □

I det følgende kan det antages at et suffiks-træ og et suffiks-array for en streng af længde n fra et alfabet med $O(1)$ tegn kan konstrueres i $O(n)$ tid.

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der givet en streng U af længde n fra et alfabet med $O(1)$ tegn, finder den leksikografisk mindste rotation. Angiv algoritmens udførselstid. □

En streng er et *palindrom* hvis strengen læst bagfra giver det samme, f.eks. `IBOFOBI`.

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme der givet en streng U af længde n fra et alfabet med $O(1)$ tegn, afgør om der findes en rotation af U der er et palindrom. Angiv algoritmens udførselstid. □