DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

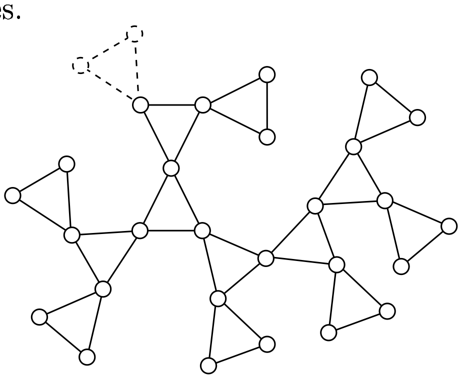
Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 5 (fem)
Eksamensdag: Fredag den 23. juni 2006, kl. 9.00-13.00
Eksamenslokale: Skøjtehallen, Gøteborg Allé 9, Århus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater)
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

I denne opgave betragtes *trekant-træer*. Et trækant-træ kan konstrueres ved at starte med en enkelt trekant, og derefter tilføje nye trekanter til eksisterende knuder i grafen af grad to, jvf. nedenstående eksempel hvor den stiplede trekant tilføjes. Vi lader t betegne antal trekanter der er i grafen. I nedenstående figur er der $t = 13$ trekanter før den stiplede trekant tilføjes.



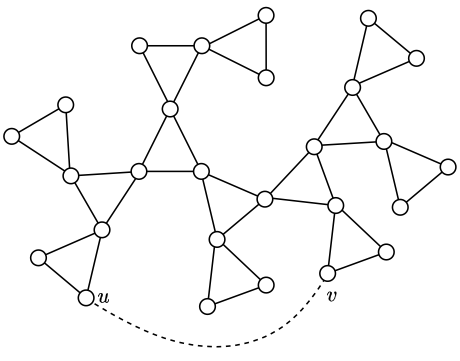
Spørgsmål a: Angiv antal knuder n og kanter m i et trekant-træ som funktion af antal trekanter t. Angiv som funktion af t udførselstiden for Kruskal's algoritme for at finde et minimum udspændende træ af et vægtet trekant-træ. □

Man kan i det følgende bruge nedenstående sætning om minimum udspændende træer uden bevis:

> *Lad G være en vægtet uorienteret graf hvor alle kanter har forskellige vægte. Lad e være en kant i G. Et minimum udspændende træ for G indeholder e hvis og kun hvis G ikke indeholder en cykel C, hvor e er den tungeste kant i cyklen C.*

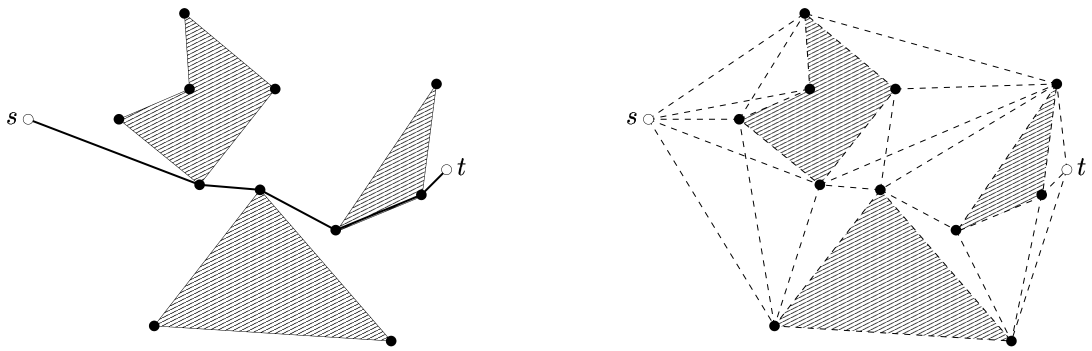
Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der finder et minimum udspændende træ for et vægtet trekant-træ i tid $O(n)$. Det kan antages at alle vægte er forskellige. □

Spørgsmål c: Beskriv en algoritme med udførselstid $O(n)$ der finder et minimum udspændende træ for et vægtet trekant-træ udvidet med en *ekstra kant* (u, v). Det kan antages at alle vægte er forskellige. □



Opgave 2 (25%)

I denne opgave skal en robot finde en korteste vej i planen fra et punkt s til et punkt t uden et køre igennem nogle forhindringer, der er givet ved nogle polygoner. Polygonerne er givet ved i alt n knuder. En kortest vej fra s til t vil altid bestå af en sti der starter i s, følger rette linier til en delmængde af polygonpunkterne, for at slutte i t. Se nedenstående figur til venstre hvor $n = 11$. Bemærk at stien godt kan følge en kant i en af polygonerne.



For at at finde den korteste vej, er det derfor tilstrækkeligt at kigge på *synlighedsgrafen*, som har $n+2$ knuder, nemlig de n polygonknuder og s og t. Kanterne i synlighedsgrafen er netop de par af knuder, hvor man kan tegne en ret linie uden at krydse det indre af en af polygonforhindringerne. Bemærk at alle polygonkanterne også er en del af kanterne i synlighedsgrafen. Ovenstående figur til højre viser synlighedsgrafen for situationen til venstre. Bemærk at kanter kan krydse hinanden. Antal kanter i en synlighedsgraf er $O(n^2)$.

Spørgsmål a: Givet en synlighedsgraf med $n + 2$ knuder og $O(n^2)$ kanter, beskriv hvordan en korteste vej fra s til t kan findes i tid $O(n^2)$. □

Spørgsmål b: Givet en synlighedsgraf for en mængde af forhindringer givet ved n polygonpunkter, et punkt t, og k *robotter* (dvs. synlighedsgrafen har $n + k + 1$ knuder og $O((n + k)^2)$ kanter), beskriv en algoritme der finder robotten med korteste afstand til t. Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Argumenter for at synlighedsgrafen for en mængde af polygonforhindringer med totalt n punkter og to punkter s og t kan have størrelsesorden n^2, dvs. at antal kanter i synlighedsgrafen er $\Theta(n^2)$. (Giv et eksempel hvor synlighedsgrafen har $n + 2$ knuder og $\Theta(n^2)$ kanter). □

Opgave 3 (25%)

I denne opgave er der givet en sorteret sekvens af n posititve heltal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ og et positivt heltal W. Vi ønsker at finde en delsekvens $y_1, \ldots, y_m \subseteq x_1, \ldots, x_n$, hvor $y_1 = x_1$ og $y_m = x_n$. Målet er at finde en sekvens således at to på hinanden følgende y_i og y_{i+1} har forskel tæt på W. Mere præcist ønsker vi at *ujævnheden* af delsekvensen, defineret ved

$$\sum_{i=1}^{m-1} (y_{i+1} - y_i - W)^2 ,$$

er mindst mulig.

Eksempel: For $W = 5$ og sekvensen $x_1, \ldots, x_8 = 2, 4, 8, 9, 11, 13, 14, 20$, har delsekvensen 2,8,13,20 en ujævnhed på

$$(8 - 2 - 5)^2 + (13 - 8 - 5)^2 + (20 - 13 - 5)^2 = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5 .$$

En delsekvens med mindst mulig ujævnhed er delsekvensen $2, 8, 14, 20$ som har ujævnhed 3.

I det følgende er W et vilkårligt men fast heltal og $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en vilkårlig men fast sekvens af heltal. For $1 \leq k \leq n$, lad $U(k)$ betegner den minimale ujævnhed for en delsekvens af $x_1, \ldots, x_k$. Specielt er $U(n)$ den minimale ujævnhed for en delsekvens af hele sekvensen.

$U(k)$ kan beskrives ved følgende rekursionsformel:

$$U(k) = \begin{cases} 0 & \text{hvis} \quad k = 1 \\ \\ \min\limits_{i\,:\,1 \leq i < k} \left(U(i) + (x_k - x_i - W)^2 \right) & \text{hvis} \quad k > 1 \end{cases}$$

Spørgsmål a:

Udfyld nedstående tabel for $W = 7$ og sekvensen $2, 6, 8, 10, 14, 15, 20, 21$

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$U(k)$								

□

Spørgsmål b: Angiv en algorime baseret på dynamisk programmering der finder den mindste ujævnhed for en delsekvens af $x_1, \ldots, x_n$ (indeholdende x_1 og x_n). Angiv algoritmens udførselstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen til at rapportere en delsekvens der har mindst mulig ujævnhed. Angiv algoritmens udførselstid. □

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 4 (25%)

I denne opgave er input en tekst T af længde n og et mønster P af længde m, begge over et alfabet med $O(1)$ tegn.

Vi ønsker at finde alle forekomster af P i T og alle forekomster af P *med et tegn slettet* i T. F.eks. forekommer mønsteret `bbcab` med det tredie tegn slettet i teksten `aaabbabbaa` på position 4.

Spørgsmål a: Angiv alle forekomster af mønsteret

$$P = \texttt{abacab}$$

og alle forekomster af P med et tegn slettet i teksten

$$T = \texttt{abaabacabacbabcabaa} \ .$$

$\square$

Spørgsmål b: Angiv en algoritme med udførelsestid $O(nm)$ for at finde alle forekomster af mønsteret P i strengen T med højst et tegn slettet. (Brug Knuth-Morris-Pratt algoritmen). $\square$

I det følgende kan antages at et suffix-træ for en streng af længde n fra et alfabet med $O(1)$ tegn kan konstrueres i $O(n)$ tid.

Spørgsmål c: Angiv en forbedret $O(n + m^2)$ algoritme for at finde alle forekomster af mønsteret P i strengen T med højst et tegn slettet. $\square$

Spørgsmål d: Angiv en algoritme for at finde alle forekomster i strengen T af mønsteret P med højst *to* slettede tegn. Angiv algoritmens udførselstid. $\square$