DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

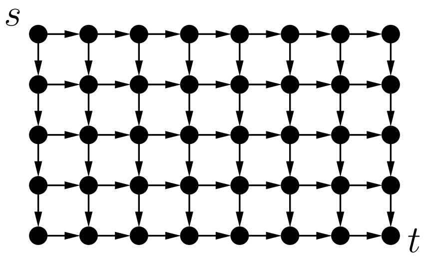
Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 6 (seks)
Eksamensdag: Onsdag den 11. august 2004, kl. 9.00-13.00
Eksamenslokale: Trøjborg-komplekset, Niels Juelsgade 84, lok. 139, 8200 Århus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater)
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

I denne opgave betragtes (r, k) gitter-grafer, som er orienterede grafer hvor knuderne er arrangeret i et gitter med r rækker og k søjler. Hver knude v har en kant til knuden umiddelbart nedenunder v i v's søjle (såfremt v ikke er i den nederste række) og en kant til knuden umiddelbart til højre for v (såfremt v ikke er i søjlen længst til højre). Den øverste venstre knude betegnes s og knuden nederst til højre betegnes t. Nedenstående er en $(5, 8)$ gitter-graf.



I det følgende antages alle kanter at have en ikke negativ vægt.

Spørgsmål a: Angiv antal kanter m og antal knuder n i en (r, k) gitter-graf som funktion af r og k. Angiv udførelsestiden af Dijkstra's algoritme til at finde de korteste afstande fra s til t. □

Spørgsmål b: Angiv en algoritme med udførelsestid $O(n)$, der beregner den korteste afstand fra s til t i en (r, k) gitter-graf. □

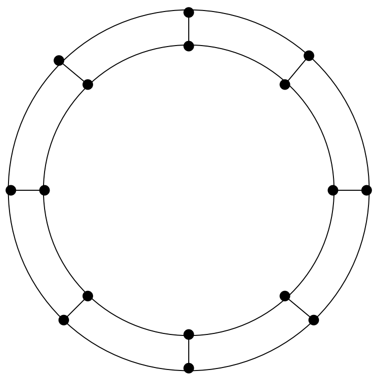
Spørgsmål c: Angiv en algoritme med udførelsestid $O(n)$, der beregner længden af den længste sti fra s til t i en (r, k) gitter-graf. □

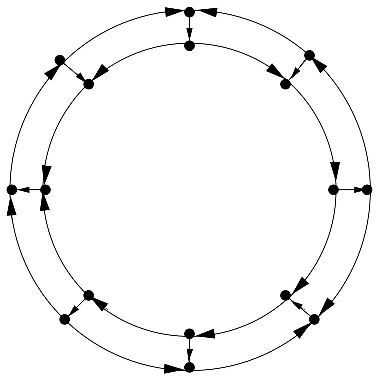
Antag nu at kanterne også kan have en negativ vægt.

Spørgsmål d: Angiv en algoritme der beregner længden af den længste sti i en (r, k) gitter-graf. Angiv algoritmes udførelsestid. Bemærk at stien ikke behøver at gå fra s til t. □

Opgave 2 (25%)

I denne opgave betragtes *dobbelt-ring* grafer. En dobbelt-ring graf med n *broer*, er en uorienteret graf hvor der er $2n$ knuder. Knuderne er forbundet med kanter så de danner to cykler med hver n knuder, og den $i$te knude i den ene cykel er forbundet med en kant/bro til den $i$te knude i den anden cykel. Nedenstående graf til venstre viser en dobbelt-ring graf med 8 broer.





Spørgsmål a: Angiv udførelsestiden for Prim-Jarnik's algoritme for at beregne et minimum udspændende træ for en vægtet dobbelt-ring graf med n broer. Udførelsestiden skal angives som funktion af n. □

Man kan i det følgende spørgsmål bruge nedenstående sætning om minimum udspændende træer uden bevis:

> *Lad $G = (V, E)$ være en vægtet uorienteret graf, og lad $K \subseteq E$ være en kantmængde, som indeholder et minimum udspændende træ for G. Hvis K indeholder en cykel C og hvis e er en kant i C af størst vægt, da vil $K \setminus \{e\}$ også indeholde et minimum udspændende træ for G.*

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme med udførelsestid $O(n)$, der finder et minimum udspændende træ for en vægtet dobbelt-ring graf med n broer. Argumenter for algoritmens udførelsestid. □

I det følgende spørgsmål betragtes orienterede dobbelt-ring grafer med n broer, som er dobbelt-ring grafer hvor hver kant repræsenterer en orienteret kant, jævnfør ovenstående graf til højre.

Spørgsmål c: Angiv en algoritme med udførelsestid $O(n)$, der givet en orienteret dobbelt-ring graf med n broer afgør om der for alle par af knuder u og v findes orienterede stier fra u til v og fra v til u. □

Opgave 3 (25%)

I denne opgave betragter vi strenge over alfabetet $\Sigma = \{a, b, c\}$. For en streng S lader vi $\overline{S}$ betegne den reverserede streng, d.v.s. strengen læst bagfra. For eksempel er

$$\overline{abbcaabc} = cbaacbba$$

Spørgsmål a: Angiv en trie for følgende strenge

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} S_1 & = & cbcab & S_6 & = & cbaaa \\ S_2 & = & ababab & S_7 & = & aabcb \\ S_3 & = & aba & S_8 & = & aaaccba \\ S_4 & = & babcc & S_9 & = & aabcc \\ S_5 & = & cacba & S_{10} & = & acaacc \end{array}$$

□

Spørgsmål b: Antag der er givet en trie $\mathcal{T}$ for en mængde strenge $S_1, \ldots, S_k$. Beskriv en algoritme der givet en forespørgselsstreng P, afgør om der i trien findes en streng S_i hvor $P = \overline{S_i}$. Algoritmens udførelsestid skal være $O(|P|)$. □

Spørgsmål c: Antag der er givet k ikke-tomme strenge $S_1, \ldots, S_k$ med totalt n tegn, d.v.s. $n = \sum_{i=1}^{k} |S_i|$. Beskriv en algoritme med udførelsestid $O(n)$, som afgør om der blandt de k strenge findes to strenge S_i og S_j således at $S_i = \overline{S_j}$. Output af algoritmen skal i givet fald være $< i, j >$.

Bemærk at hvis en af strengene opfylder $S_i = \overline{S_i}$, så er S_i et palindrom og $< i, i >$ er et muligt output. □

Opgave 4 (25%)

I denne opgave betragtes to strenge

$$S = s_1 s_2 \cdots s_n$$

$$T = t_1 t_2 \cdots t_m$$

af længde henholdsvis n og m. Vi ønsker at finde den fælles delsekvens for S og T der opnår den *maksimale blok-score*, som er defineret nedenfor.

Antag at en fælles delsekvens for S og T kan deles op i p blokke $B_1, \ldots, B_p$, hvor B_i er en sammenhængende delsekvens i både S og T. Vi definerer blok-scoren af opdelingen som

$$|B_1| + |B_2| + \cdots + |B_p| - p$$

Den *maksimale blok-score* er blok-scoren af den fælles delsekvens for S og T der har den maksimale blok-score.

For eksempel har nedenstående to strenge en maksimal blokscore på $2 + 4 + 4 - 3 = 7$. Kasserne angiver opdelingen i blokke af den fælles delsekvens for S og T.

$$S = \boxed{ab}\,cc\,\boxed{baca}\,ba\,\boxed{abad}$$

$$T = \boxed{ab}\,aba\,\boxed{baca}\,\boxed{abad}\,ad$$

Vi definerer nu:

$$B(i, j) = \text{den maksimale blok-score af } s_1 s_2 \cdots s_i \text{ og } t_1 t_2 \cdots t_j.$$

Spørgsmål a: Lad $S = bbcba$ og $T = bccbba$. Udfyld følgende tabel for $B(i, j)$ for $0 \le i \le 5$ og $0 \le j \le 6$.

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							

□

(Opgavesættet fortsætter)

Det påstås at $B(i,j)$ opfylder følgende rekursionsformel:

$$B(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{hvis} \quad i = 0 \ \vee \ j = 0 \\ \max\{B(i,j-1), B(i-1,j)\} & \text{hvis} \quad s_i \neq t_j \\ \max\{B(i,j-1), B(i-1,j), B(i-k,j-k)+k-1\} & \text{hvis} \quad s_i = t_j \ \wedge \\ \qquad k \geq 1 \text{ er maksimal så: } s_i = t_j \ \wedge \ s_{i-1} = t_{j-1} \ \wedge \cdots \wedge \ s_{i-k+1} = t_{j-k+1} & \end{cases}$$

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet to strenge S og T af længde henholdsvis n og m, beregner $B(n,m)$, d.v.s. den maksimale blok-score for strengene S og T. Angiv algoritmens udførelsestid. □

Spørgsmål c: Beskriv en udvidelse af algoritmen fra spørgsmål **b** til også at rapportere en fælles delsekvens af S og T der har maksimal blok-score. Angiv algoritmens udførelsestid. □