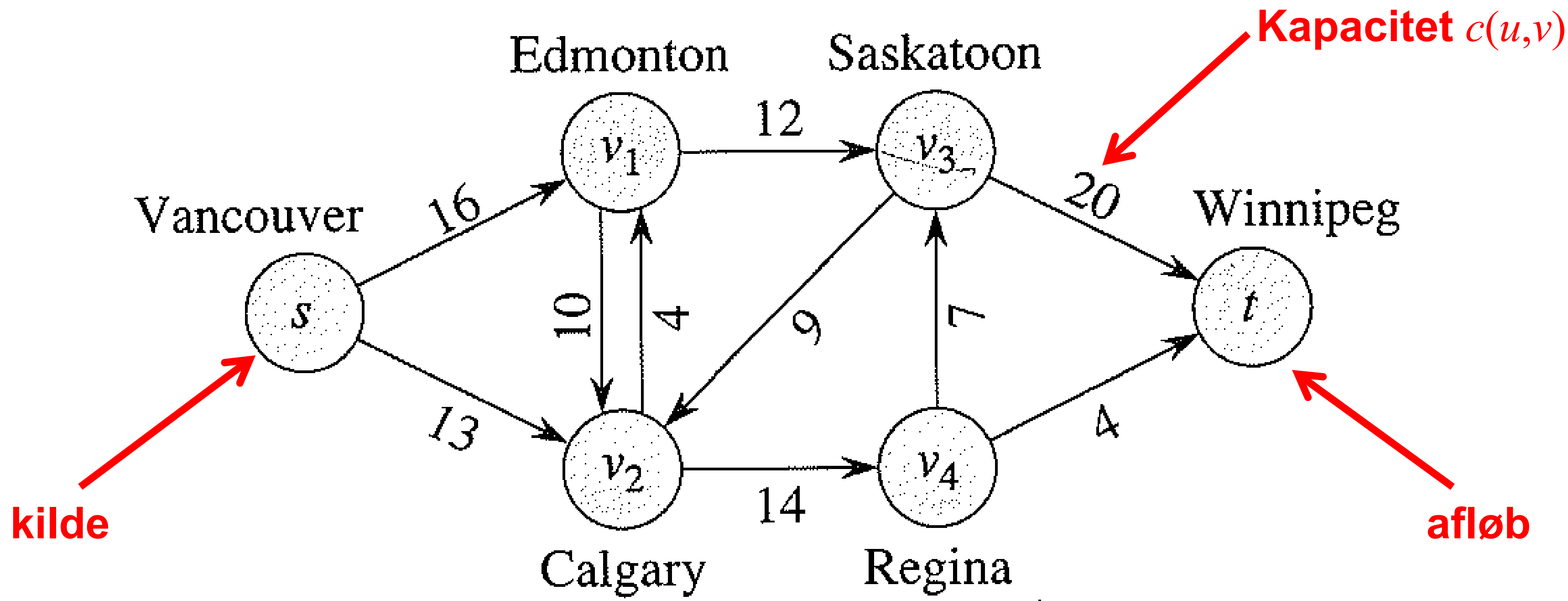
Ford-Fulkerson
Algoritmer og Datastrukturer 2

Maksimale Strømninger [CLRS, kapitel 26.1-26.3]

Gerth Stølting Brodal
Aarhus Universitet

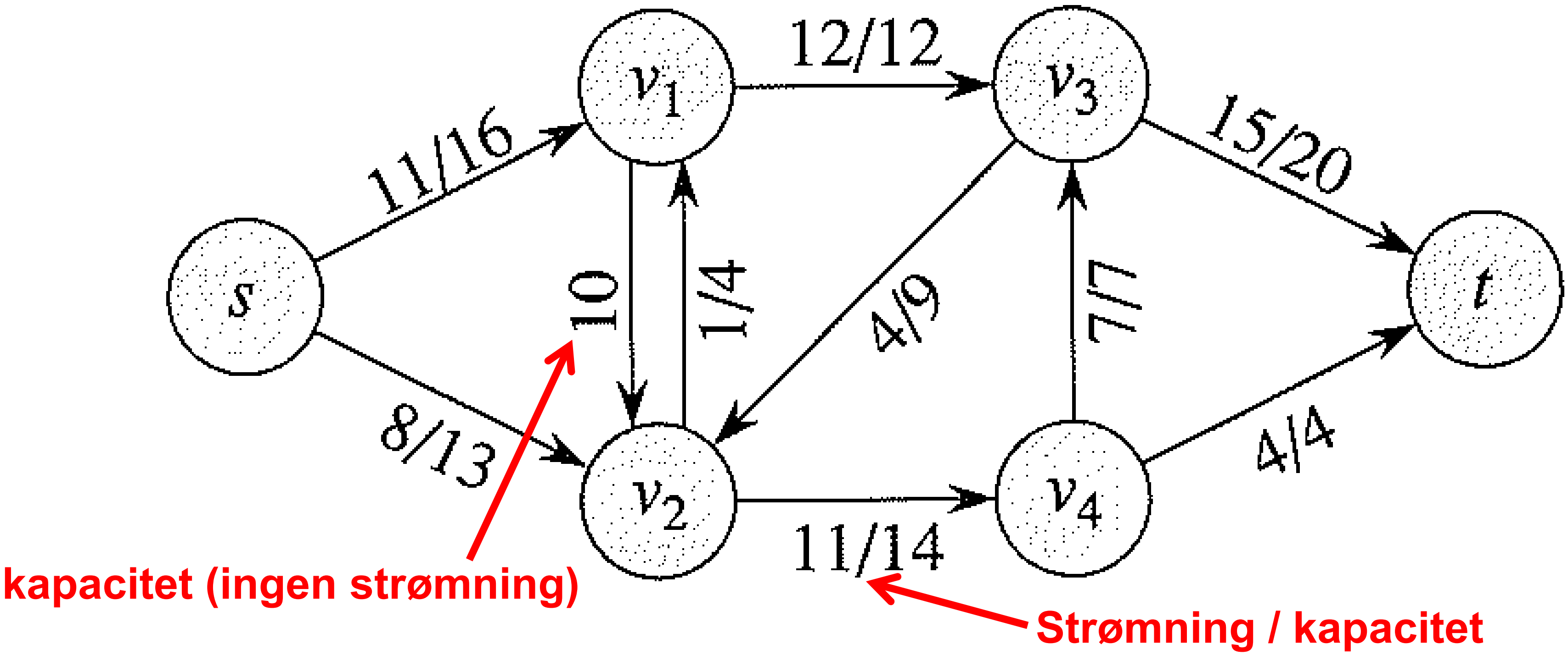
Maximale Strømninger i Netværk



Input: En orienteret graf $G=(V,E)$, hvor alle kanter (u,v) har en kapacitet $c(u,v)$, og to knuder kilde $s \in V$ (source), og afløbet $t \in V$ (sink).

Output: En maximal strømning f i netværket fra s til t.

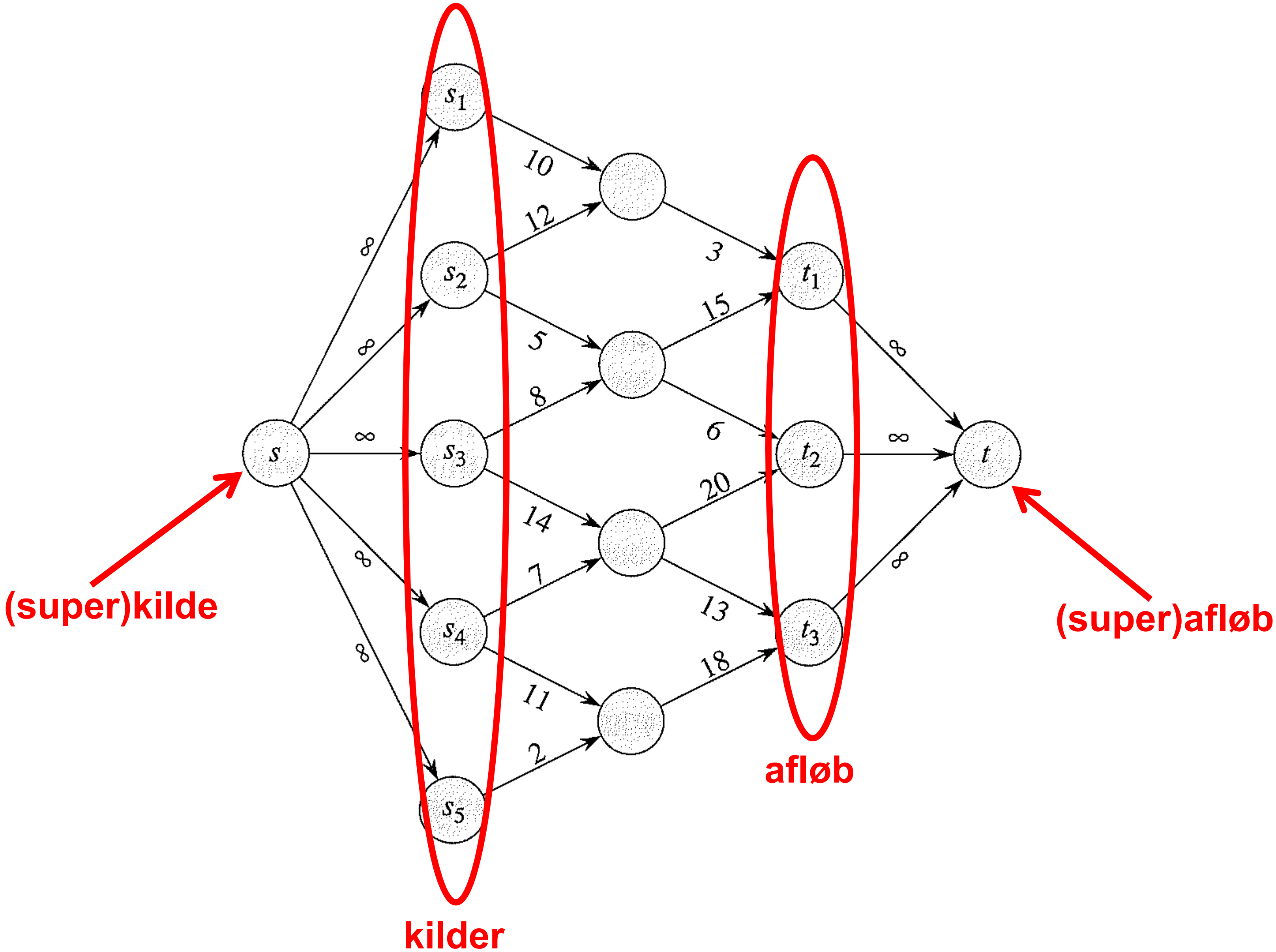
Maximale Strømninger i Netværk



Krav til f **:**

$f(u,v) = -f(v,u)$	for alle kanter (strømbevaring)
$\Sigma_{v \in V} f(u,v) = 0$	for alle knuder ≠ s,t (strøm in=strøm ud)
$f(u,v) \leq c(u,v)$	for alle kanter (strømbevaring)

Flere kilder og afløb

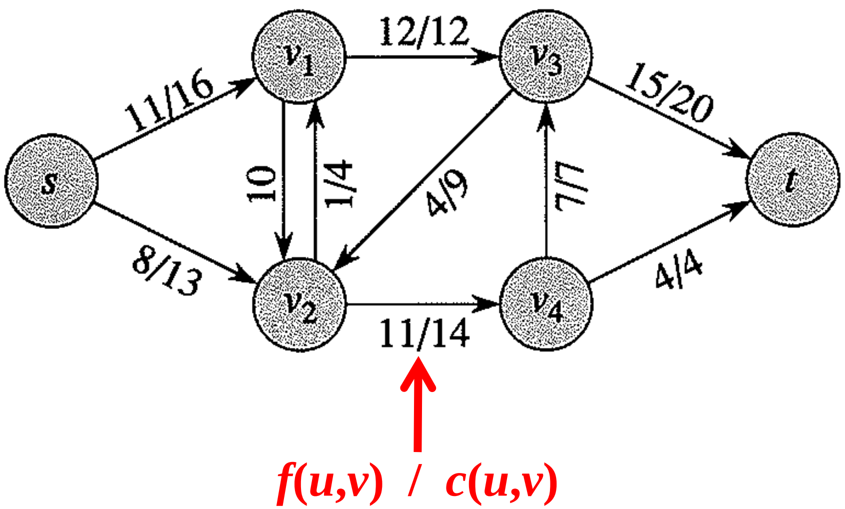


1962

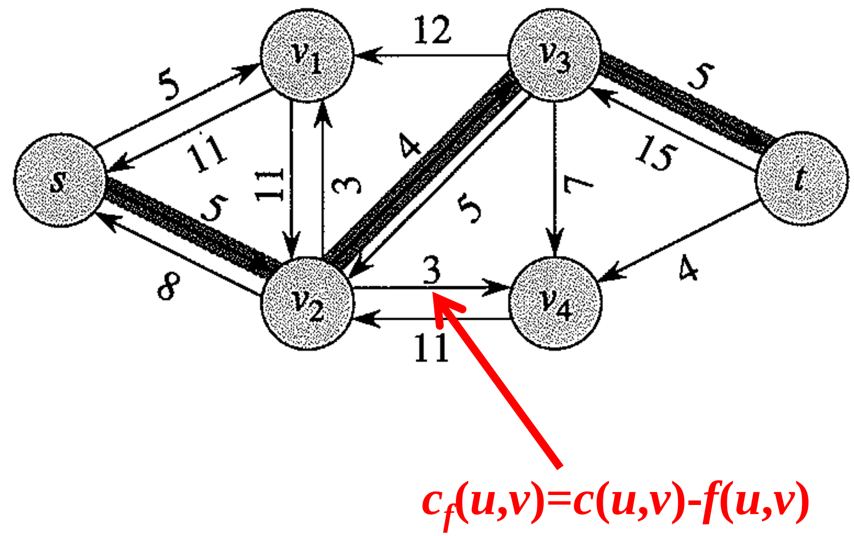
Ford-Fulkerson: Forbedrende stier

```
FORD-FULKERSON-METHOD(G, s, t)
initialize flow f to 0
while there exists an augmenting path p
      do augment flow f along p
return f
```

Ford-Fulkerson: Rest-netværk



Strømning / Kapacitet



Rest-netværk & forbedrende sti

Observation: *s*-*t* sti i rest-netværket ≡ forbedrende sti i netværket

Ford-Fulkerson

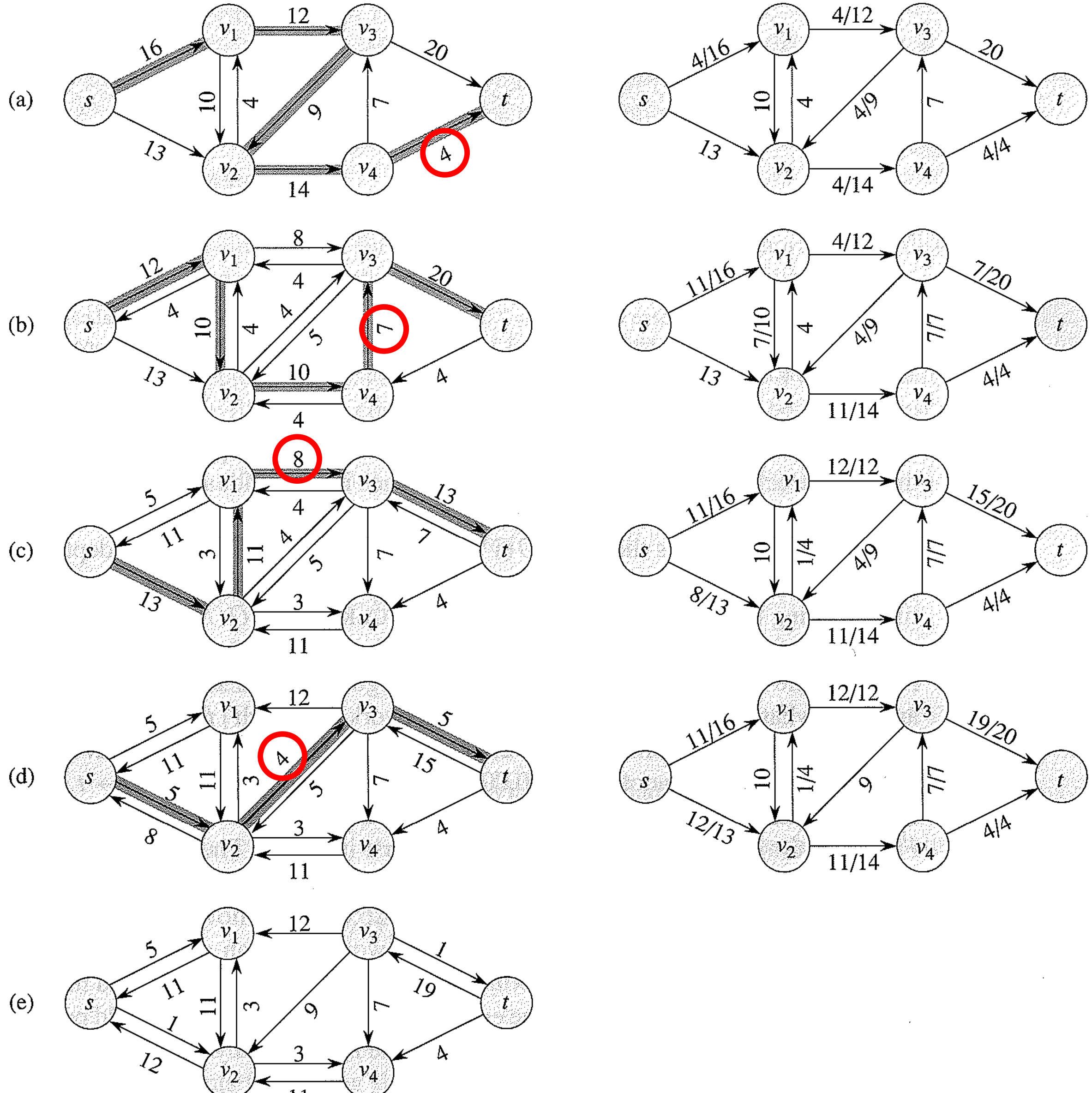
1962

FORD-FULKERSON(G, s, t)

for each edge $(u, v) \in E[G]$
  do $f[u, v] \leftarrow 0$
    $f[v, u] \leftarrow 0$
while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
  do $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ is in } p\}$
    for each edge (u, v) in p
      do $f[u, v] \leftarrow f[u, v] + c_f(p)$
        $f[v, u] \leftarrow -f[u, v]$

maximale forøgelse langs stien p

Ford-Fulkerson : eksempel



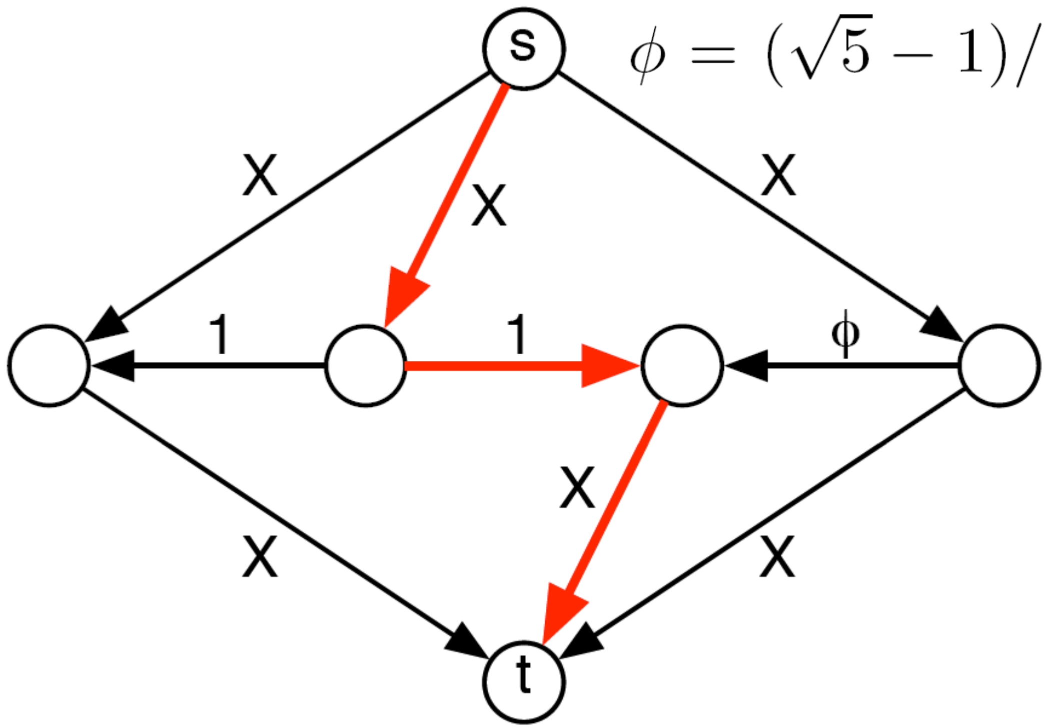
rest-netværk **aktuelle strømning**

Ford-Fulkerson : Analyse

Sætning

Hvis alle kapaciteterne i et netværk er heltallige og f^* er en maximal strømning, så tager Ford-Fulkerson algoritmen tid $O(E \cdot |f^*|)$.

Ford-Fulkerson : Eksempel
∞ mange forbedrende stier



$\phi = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618034$

X = stort tal

Der findes en række (hvilken?) af forbedrende stier som konvergerer mod en strømning af størrelse

$$1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \phi^i = 1 + \frac{2}{1-\phi} = 4 + \sqrt{5} < 7$$

hvilket er langt fra det optimale på 2X+1.

Edmonds-Karp

Edmonds-Karp algoritmen =

Ford-Fulkerson algoritmen der altid vælger en forbedrende sti med færrest mulige kanter (vha BFS)

Sætning

Edmonds-Karp algoritmen finder højst $O(V \cdot E)$ forbedrende stier, d.v.s. kører i tid $O(V \cdot E^2)$.

Maksimale strømninger – Historisk overblik

year	discoverer(s)	bound
1951	Dantzig [11]	$O(n^2 mU)$
1956	Ford & Fulkerson [17]	$O(nmU)$
1970	Dinitz [13] Edmonds & Karp [15]	$O(nm^2)$
1970	Dinitz [13]	$O(n^2 m)$
1972	Edmonds & Karp [15] Dinitz [14]	$O(m^2 \log U)$
1973	Dinitz [14] Gabow [19]	$O(nm \log U)$
1974	Karzanov [36]	$O(n^3)$
1977	Cherkassky [9]	$O(n^2 m^{1/2})$
1980	Galil & Naamad [20]	$O(nm \log^2 n)$
1983	Sleator & Tarjan [46]	$O(nm \log n)$
1986	Goldberg & Tarjan [26]	$O(nm \log(n^2/m))$
1987	Ahuja & Orlin [2]	$O(nm + n^2 \log U)$
1987	Ahuja et al. [3]	$O(nm \log(n\sqrt{\log U}/m))$
1989	Cheriyan & Hagerup [7]	$E(nm + n^2 \log^2 n)$
1990	Cheriyan et al. [8]	$O(n^3/\log n)$
1990	Alon [4]	$O(nm + n^{8/3} \log n)$
1992	King et al. [37]	$O(nm + n^{2+\epsilon})$
1993	Phillips & Westbrook [44]	$O(nm(\log_{m/n} n + \log^{2+\epsilon} n))$
1994	King et al. [38]	$O(nm \log_{m/(n \log n)} n)$
1997	Goldberg & Rao [24]	$O(\min(n^{2/3}, m^{1/2}) m \log(n^2/m) \log U)$

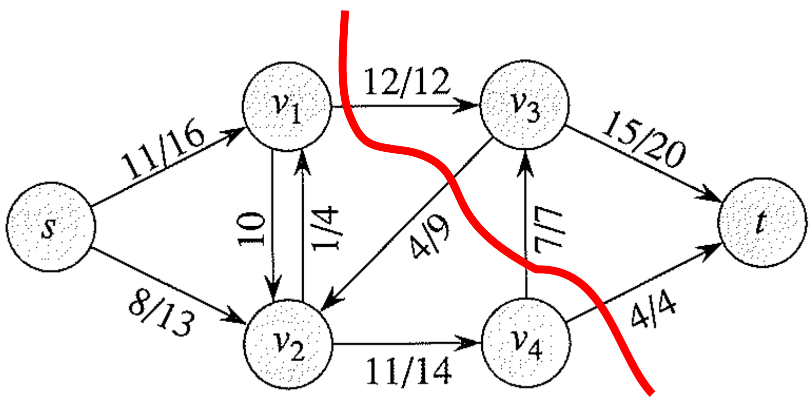
Andrew Goldberg, 1998

n **= # knuder,** ***m*** **= # kanter, kapciteter i intervallet [1..*U*]**

Maximale strømninger

Sætning

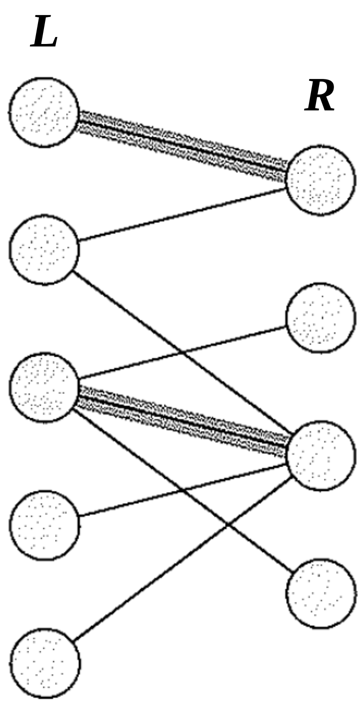
Maximal strømning = minimal snit.



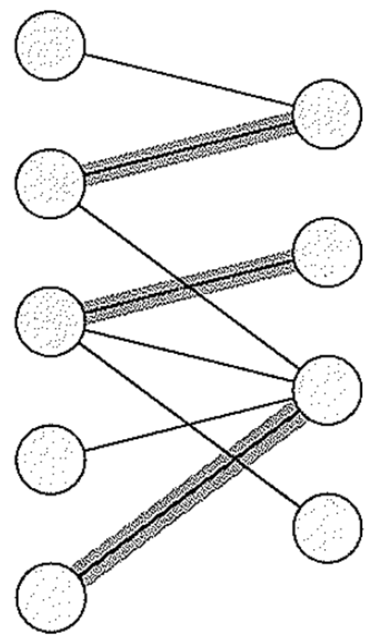
Sætning

Hvis alle kapaciteter er heltallige så finder Ford-Fulkerson og Edmonds-Karp algoritmerne en strømning hvor *strømmen langs alle kanter er heltalligt*

Parringer i todelte grafer



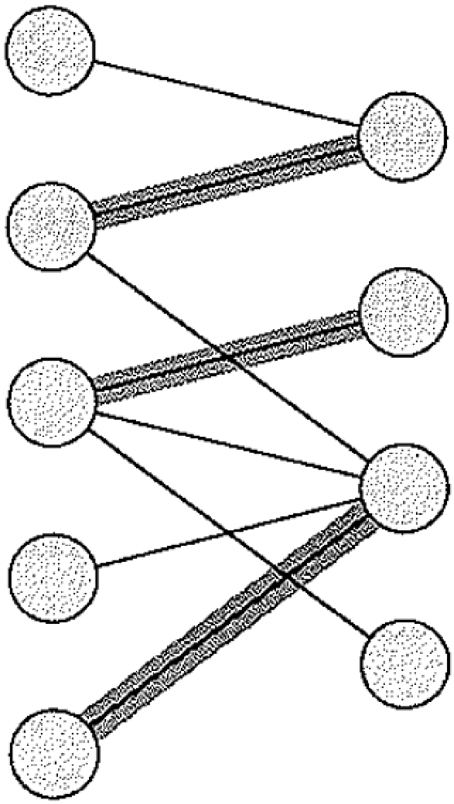
Parring af størrelse 2

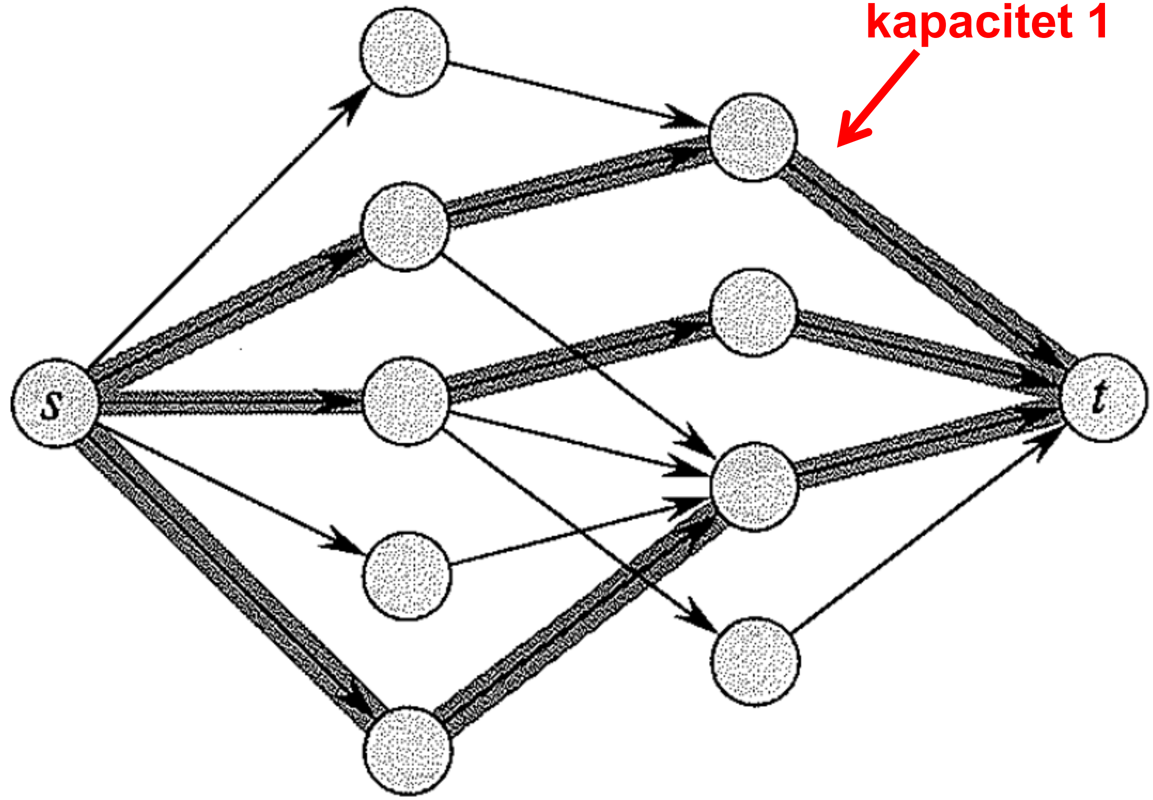


Parring af størrelse 3

Parring vs. Strømning

alle kanter kapacitet 1





Todelt graf
Maximum matching

≡

Strømnings netværk
Maximum strømning
(i en heltallig løsning, f.x. Ford-Fulkerson)