Opgave 23

Lad $x = x_1x_2\ldots x_n$, $y = y_1y_2\ldots y_m$ og $z = z_1z_2\ldots z_{n+m}$ være tre strenge af længde henholdsvis n, m og $n+m$. Vi kalder z et *flet* af x og y, hvis x og y findes som to disjunkte delsekvenser i z, og disse tilsammen udgør hele z.

> Eksempler: `gulerod` er et flet af `uro` og `gled`, og `dalgato-rastritukturmerer` er et flet af `algoritmer` og `datastrukturer`.

For $0 \leq i \leq n$ og $0 \leq j \leq m$ lader vi $F[i,j]$ være en boolsk værdi, der angiver, hvorvidt strengen $z_1z_2\ldots z_{i+j}$ er et flet af strengene $x_1x_2\ldots x_i$ og $y_1y_2\ldots y_j$. Her defineres $x_1x_2\ldots x_i$ som den tomme streng, når $i = 0$ (og tilsvarende for y og z).

$F[i,j]$ kan beskrives ved følgende rekursionsformel:

$$F[i,j] = \begin{cases} X_{ij} \ \vee \ Y_{ij}\,, & i,j \geq 1 \\ X_{ij}\,, & i \geq 1, j = 0 \\ Y_{ij}\,, & i = 0, j \geq 1 \\ \texttt{Sand}\,, & i,j = 0, \end{cases}$$

hvor X_{ij} og Y_{ij} er udsagnene

$$\begin{aligned} X_{ij} &= (z_{i+j} = x_i \ \wedge \ F[i-1,j]), \\ Y_{ij} &= (z_{i+j} = y_j \ \wedge \ F[i,j-1]). \end{aligned}$$

Spørgsmål a: Opskriv tabellen for F, når x er `uro`, y er `gled` og z er `gulerod`. □

Spørgsmål b: Beskriv i form af pseudo-kode en algoritme baseret på dynamisk programmering, som i tid $O(nm)$ afgør, hvorvidt z er et flet af x og y. Der kræves et argument for, at algoritmen har den angivne kompleksitet. □

Spørgsmål c: Gør rede for, hvordan algoritmen kan udvides til i tilfælde af et positivt svar også at returnere indekserne for en delsekvens af z, som er lig x. □