Algoritmer og Datastrukturer 1

Gerth Stølting Brodal

AARHUS UNIVERSITET

Kursusbeskrivelsen…

Kursusbeskrivelsen: Algoritmer og datastrukturer 1

Formål

Deltagerne vil efter kurset have indsigt i **algoritmer** som model for **sekventielle beregningsprocesser** og som basis for formelle **korrekthedsbeviser** og analyse af **ressourceforbrug** ved beregningerne, samt detaljeret kendskab til adskillige konkrete implementationer af fundamentale datastrukturer.

Indhold

Datastrukturer: Lister, træer, hashtabeller; *Dataabstraktioner*: Stakke, køer, prioritetskøer, ordbøger, mængder; *Algoritmer*: Søgning, sortering, selektion, fletning; *Analyse og syntese*: Worst-case, amortiseret og forventet udførelsestid, udsagn, invarianter, gyldighed, terminering og korrekthed.

Læringsmål

Deltagerne skal ved afslutningen af kurset kunne:

- **formulere** og **udføre** algoritmer og datastrukturer i pseudo code.
- **analysere** og **sammenligne** tid og pladsforbruget af algoritmer.
- **identificere** gyldige invarianter for en algoritme.
- **bevise** korrektheden af simple programmer og transitionssystemer.

Kursusbeskrivelsen:
Algoritmer og datastrukturer 1

Forudsætningskrav
dIntProg
Undervisningsformer
Forelæsninger: 4 timer/u
Obligatorisk program
6 opgaver
Eval
Sprog
Dansk
Eksamensterminer
Eksamen: 3. kvarter
Reeksamen: juni

Vi kan antage at I ved hvordan man programmerer detaljerne – så dem springer vi over

stilles 6 opgaver – alle skal dkendt for at kunne gå til Opgaverne afleveres i 1-3 personer.

Forelæsningerne gemmengår stoffet fra bogen. I *arbejder* man med stoffet.

ny (2015)

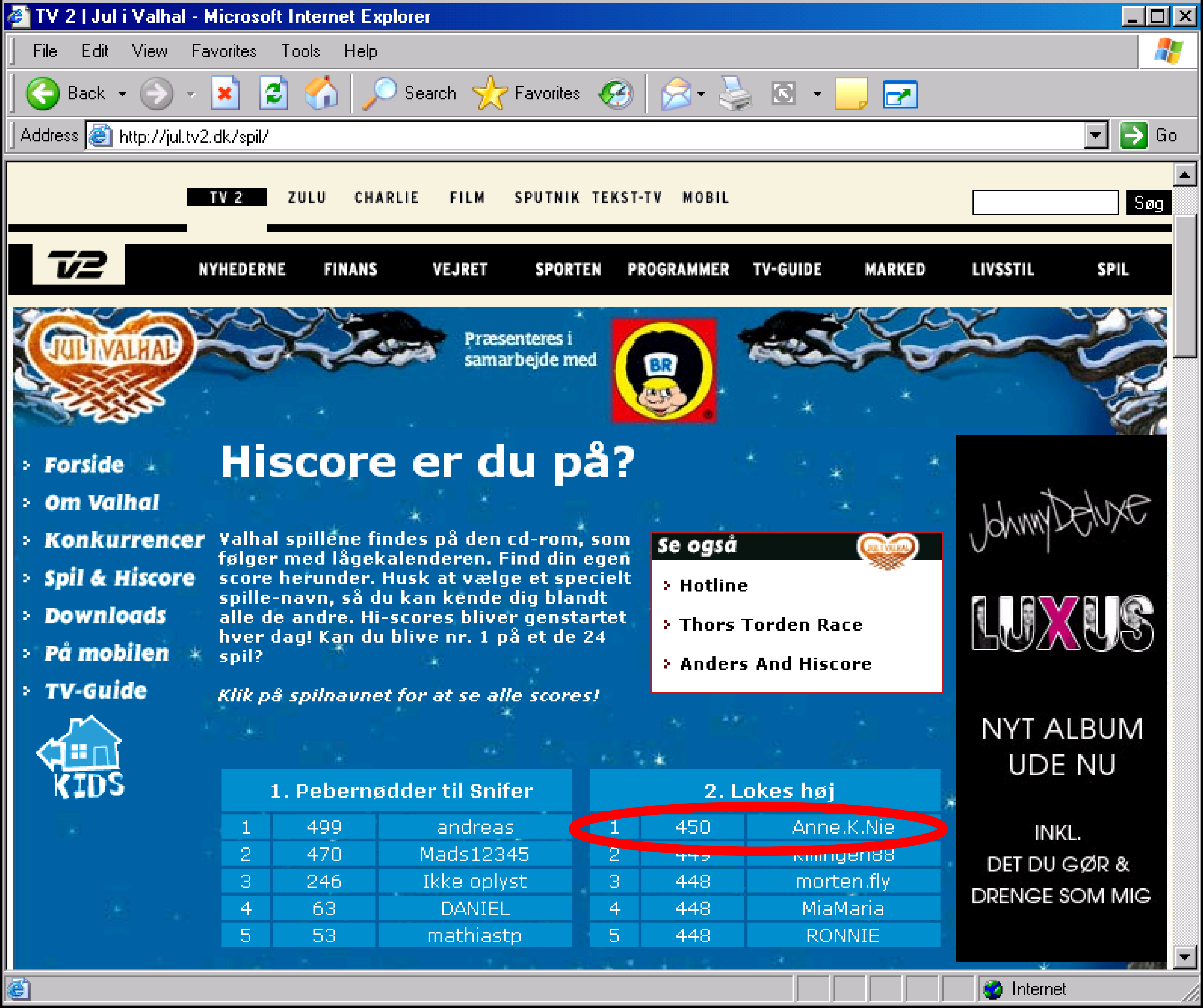
Eksamen består af ca. 25 korte spørgsmål – se eksempler på kursushjemmesiden

Spørgsmål ?

JUL I VALHAL

2005


TV2
500

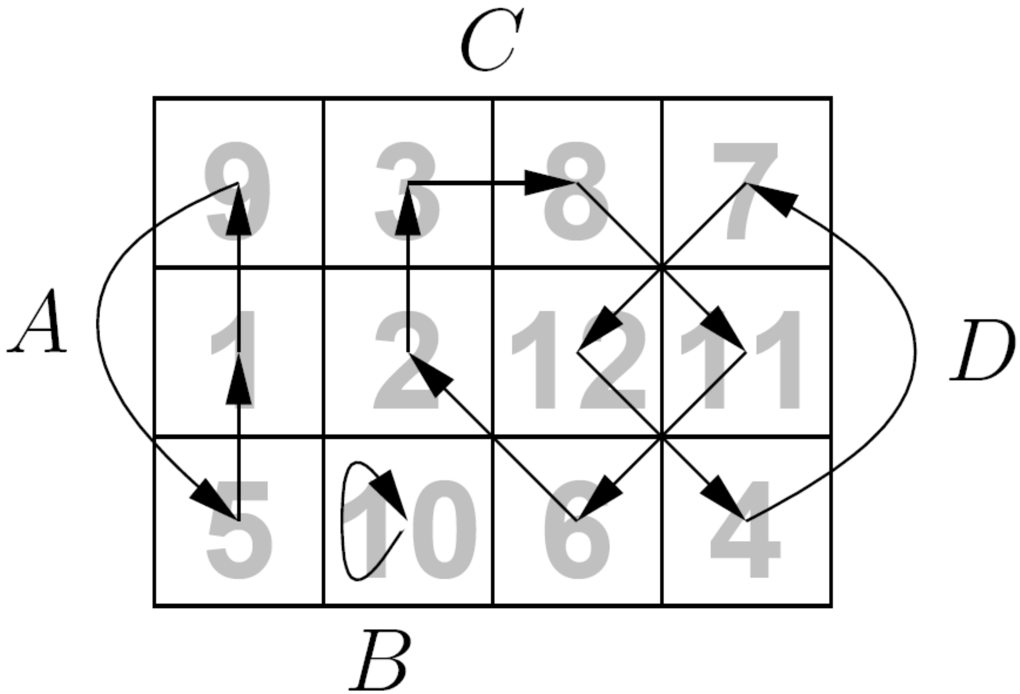

TV 2 | Jul i Valhal - Microsoft Internet Explorer
File Edit View Favorites Tools Help
Back Search Favorites
Address http://jul.tv2.dk/spil/
Go
TV 2 ZULU CHARLIE FILM SPUTNIK TEKST-TV MOBIL
Søg
TV2
NYHEDERNE FINANS VEJRET SPORTEN PROGRAMMER TV-GUIDE MARKED LIVSSTIL SPIL
JUL I VALHAL
Præsenteres i samarbejde med
BR
Forside
Om Valhal
Konkurrencer
Spil & Hiscore
Downloads
På mobilen
TV-Guide
KIDS
Hiscore er du på?
Valhal spillene findes på den cd-rom, som følger med lågekalenderen. Find din egen score herunder. Husk at vælge et specielt spille-navn, så du kan kende dig blandt alle de andre. Hi-scores bliver genstartet hver dag! Kan du blive nr. 1 på et de 24 spil?
Klik på spilnavnet for at se alle scores!
Se også
Hotline
Thors Torden Race
Anders And Hiscore
1. Pebernødder til Snifer
1 499 andreas
2 470 Mads12345
3 246 Ikke oplyst
4 63 DANIEL
5 53 mathiastp
2. Lokes høj
1 450 Anne.K.Nie
2
3 448 morten.fly
4 448 MiaMaria
5 448 RONNIE
JohnnyDeluxe
LUXUS
NYT ALBUM UDE NU
INKL.
DET DU GØR &
DRENGE SOM MIG
Internet

”Lokes Høj”

- **64 brikker**
- **Hiscore 450**
- **Antal ombytninger 500 - 450 = 50**

Hvordan opnår man et lavt antal ombytninger
– held eller dygtighed ?

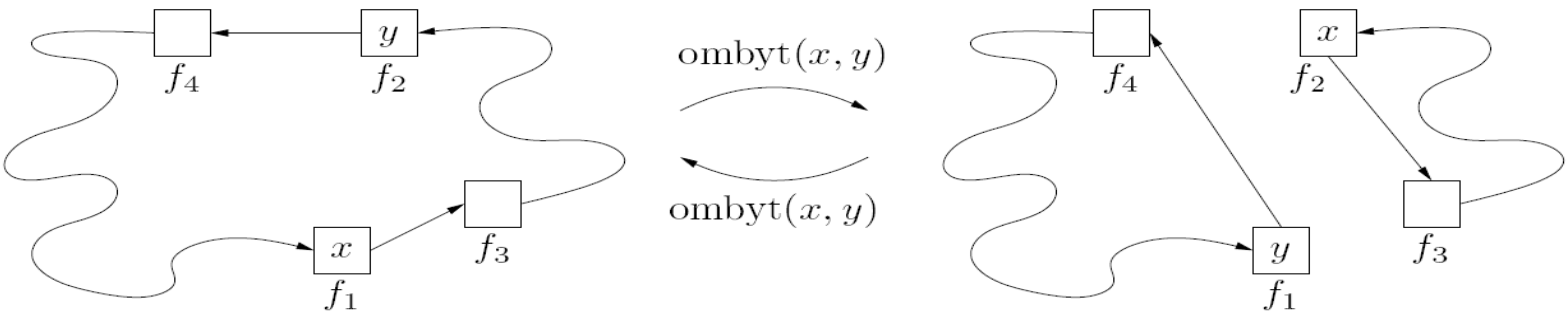
Cykler (Permutationer)



Hver pil peger på brikkens korrekte plads

Definerer en mængde af cykler (fx cyklerne A,B,C,D)

Ombytninger og Cykler



Lemma

- En ombytning af to brikker i **samme cykel** øger antallet af cykler med én.
- En ombytning af to brikker fra to **forskellige cykler** reducerer antallet af cykler med én.

Lemma
Når alle ***n*** brikker er korrekt placeret er der præcis ***n*** cykler.

Lemma
For at løse et puslespil med ***n*** brikker og ***k*** cykler I starten kræves $\geq n - k$ ombytninger.

Har vist en nedre grænse for

ALLE algoritmer der løser problemet

En (grådig) algoritme

Algoritme Puslespil
while der findes en brik x som ikke er placeret korrekt **do**
  lad y være brikken på x's korrekte plads
  ombyt(x, y)
od

Lemma
Algoritmen bytter aldrig om på brikker der står korrekt.

Lemma
Algoritmen udfører **≤ *n* -1** ombytninger

Lemma
For at løse et puslespil med ***n*** brikker og ***k*** cykler I starten udfører algoritmen præcis ***n – k*** ombytninger.

Har vist en øvre grænse for en konkret algoritme

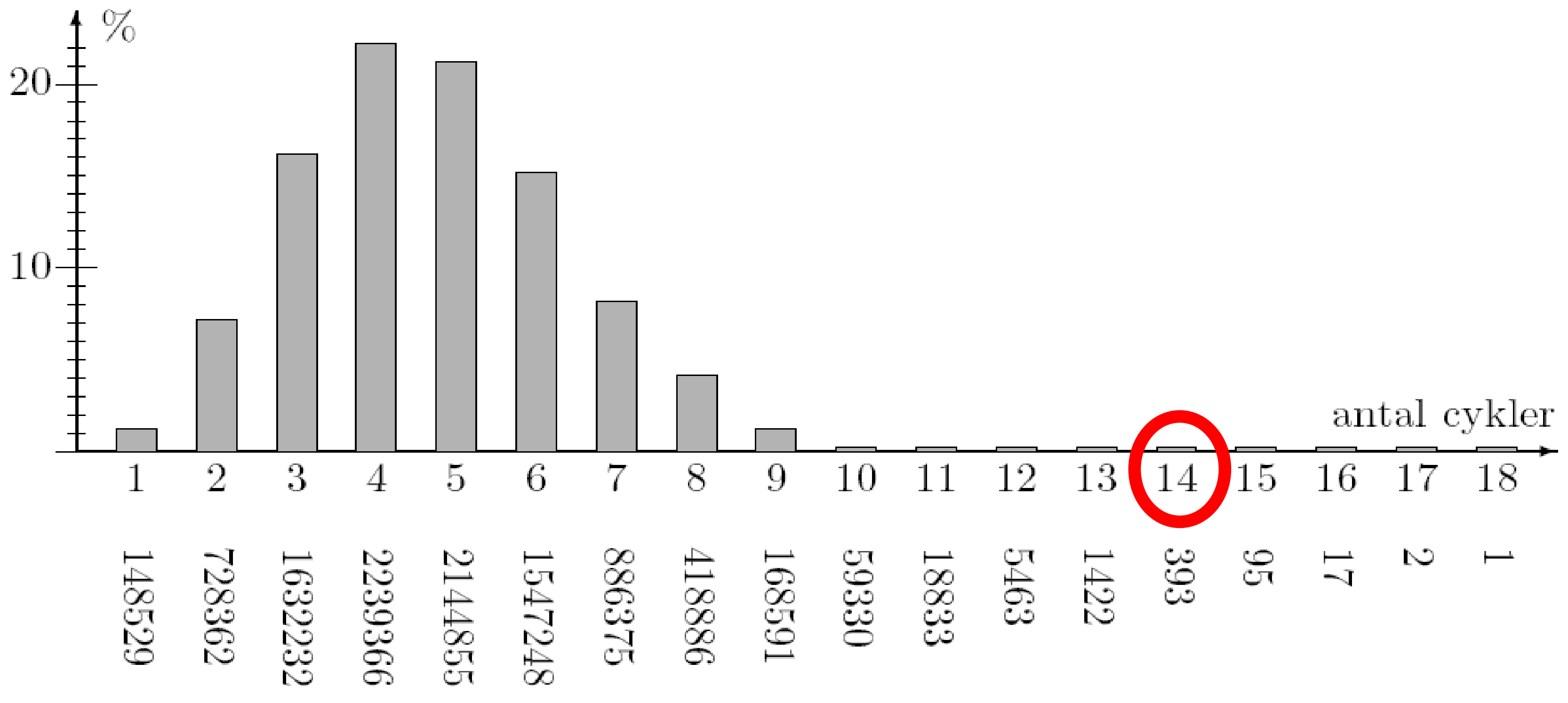
Algoritmen er optimal da antal ombytninger er bedst mulig

Sætning

For at løse et puslespil med n brikker og k cykler i starten kræves præcis $n - k$ ombytninger

Fordelingen af antal cykler

n = 64, 10.000.000 permutationer

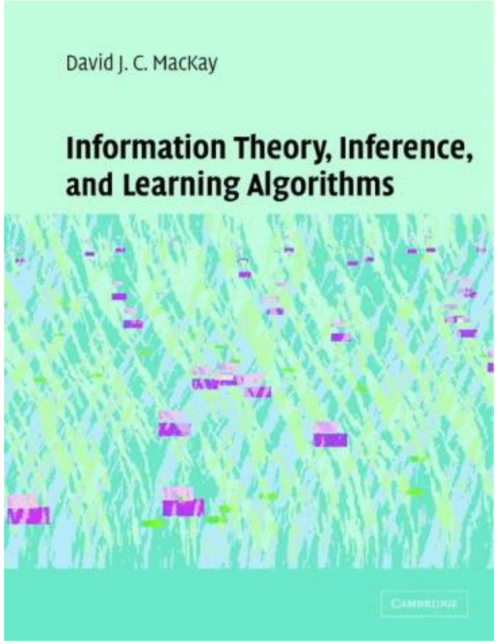


Hvad har vi så lært… ?

Algoritmisk indsigt…

- **Matematisk indsigt** (cykler)
- **Resourceforbrug** (antal ombytninger)
- **Nedre grænse** ($\geq n - k$ ombytninger)
- **Grådig algoritme**
- **Analyseret algoritmen** ($\leq n - k$ ombytninger)
- **Optimal algoritme** (argumenteret bedst mulig)
- **Input afhængig resourceforbrug**

Tilfældige permutationer…



Yderligere information kan findes i David J.C. MacKay, tillæg til *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*, om

"Random Permutations“, 4 sider.

http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/itila/cycles.pdf

Et andet eksempel på en beregningsprocess…

Programming Pearls

Second Edition

JON BENTLEY

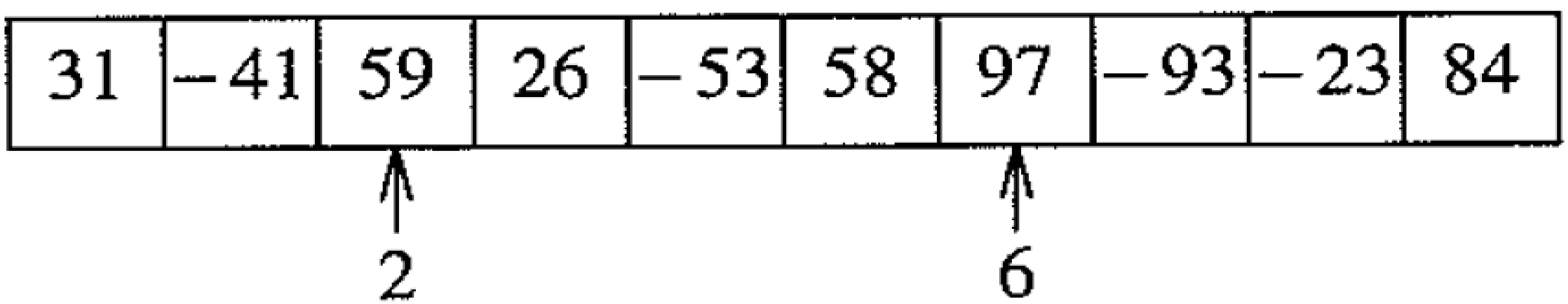
Bell Labs, Lucent Technologies
Murray Hill, New Jersey

ACM Press
New York, New York

Addison-Wesley

Boston • San Francisco • New York • Toronto • Montreal
London • Munich • Paris • Madrid
Capetown • Sydney • Tokyo • Singapore • Mexico City

Max-Delsum



Algoritme 1

```
maxsofar = 0
for i = [0, n)
    for j = [i, n)
        sum = 0
        for k = [i, j]
            sum += x[k]
        /* sum is sum of x[i..j] */
        maxsofar = max(maxsofar, sum)
```

Antal additioner:

$$\sum_{l=1}^{n} l(n-l+1) = (n+1)\sum_{l=1}^{n} l - \sum_{l=1}^{n} l^2 = (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

Algoritme 2

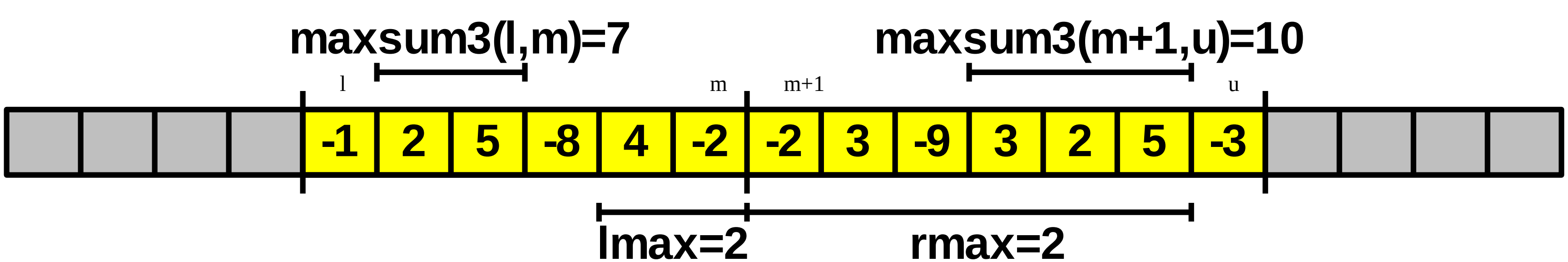
```
maxsofar = 0
for i = [0, n)
    sum = 0
    for j = [i, n)
        sum += x[j]
        /* sum is sum of x[i..j] */
        maxsofar = max(maxsofar, sum)
```

Algoritme 2b

```
cumarr[-1] = 0
for i = [0, n)
    cumarr[i] = cumarr[i-1] + x[i]
maxsofar = 0
for i = [0, n)
    for j = [i, n)
        sum = cumarr[j] - cumarr[i-1]
        /* sum is sum of x[i..j] */
        maxsofar = max(maxsofar, sum)
```

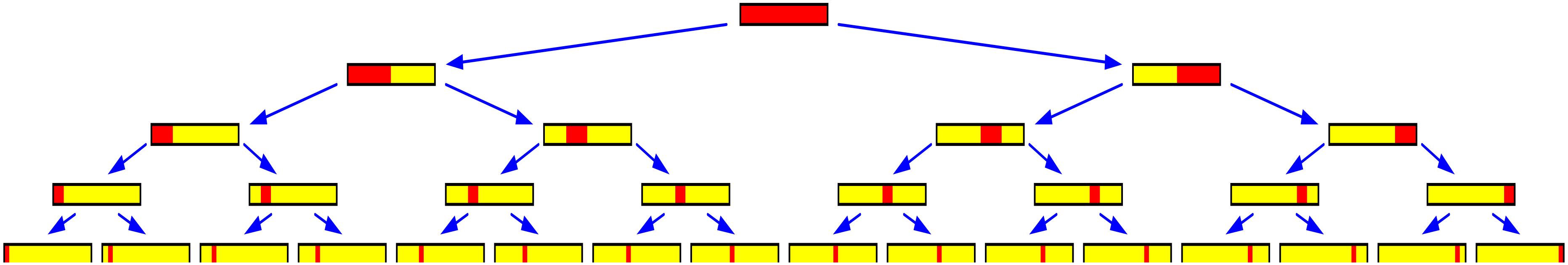
Algoritme 3

```
answer = maxsum3(0, n-1)
float maxsum3(l, u)
    if (l > u)  /* zero elements */
        return 0
    if (l == u)  /* one element */
        return max(0, x[l])

    m = (l + u) / 2
    /* find max crossing to left */
    lmax = sum = 0
    for (i = m; i >= l; i--)
        sum += x[i]
        lmax = max(lmax, sum)
    /* find max crossing to right */
    rmax = sum = 0
    for i = (m, u]
        sum += x[i]
        rmax = max(rmax, sum)

    return max(lmax+rmax, maxsum3(l, m), maxsum3(m+1, u))
```



Algoritme 3 : Analyse

Rekursionstræet



Observation

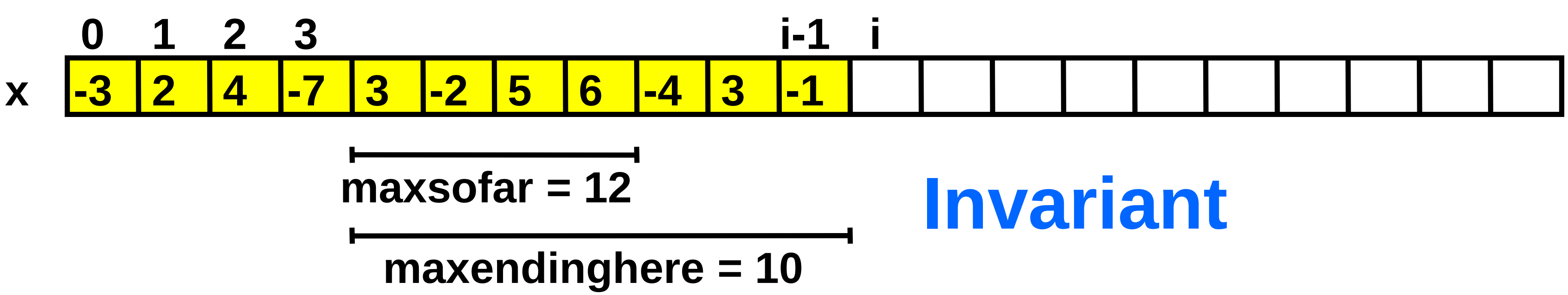
Samlet mængde additioner per lag er $\sim n$

Additioner

$\#$ additioner $\sim n \cdot \#$ lag $\sim n \cdot \log_2 n$

Algoritme 4

```
maxsofar = 0
maxendinghere = 0
for i = [0, n)
    /* invariant: maxendinghere and maxsofar
       are accurate for x[0..i-1] */
    maxendinghere = max(maxendinghere + x[i], 0)
    maxsofar = max(maxsofar, maxendinghere)
```



Invariant

Max-Delsum: Algoritmiske idéer

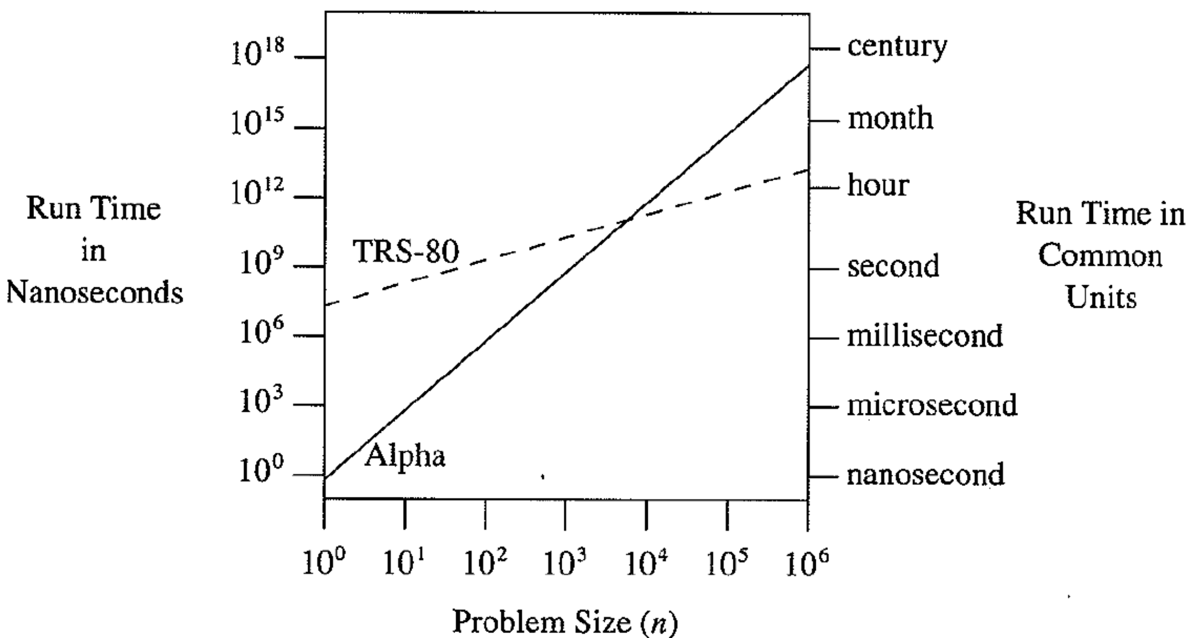
Algoritme	# additioner	Idé
1	$\sim n^3$	**Naive løsning**
2 + 2b	$\sim n^2$	**Genbrug beregninger** sum(x[i..j]) = sum(x[i..j-1]) + x[j] sum(x[i..j]) = sum(x[0..j]) - sum(x[0..i-1])
3	$\sim n \cdot \log n$	**Del-og-kombiner**
4	$\sim n$	**Inkrementel**

Sammenligning

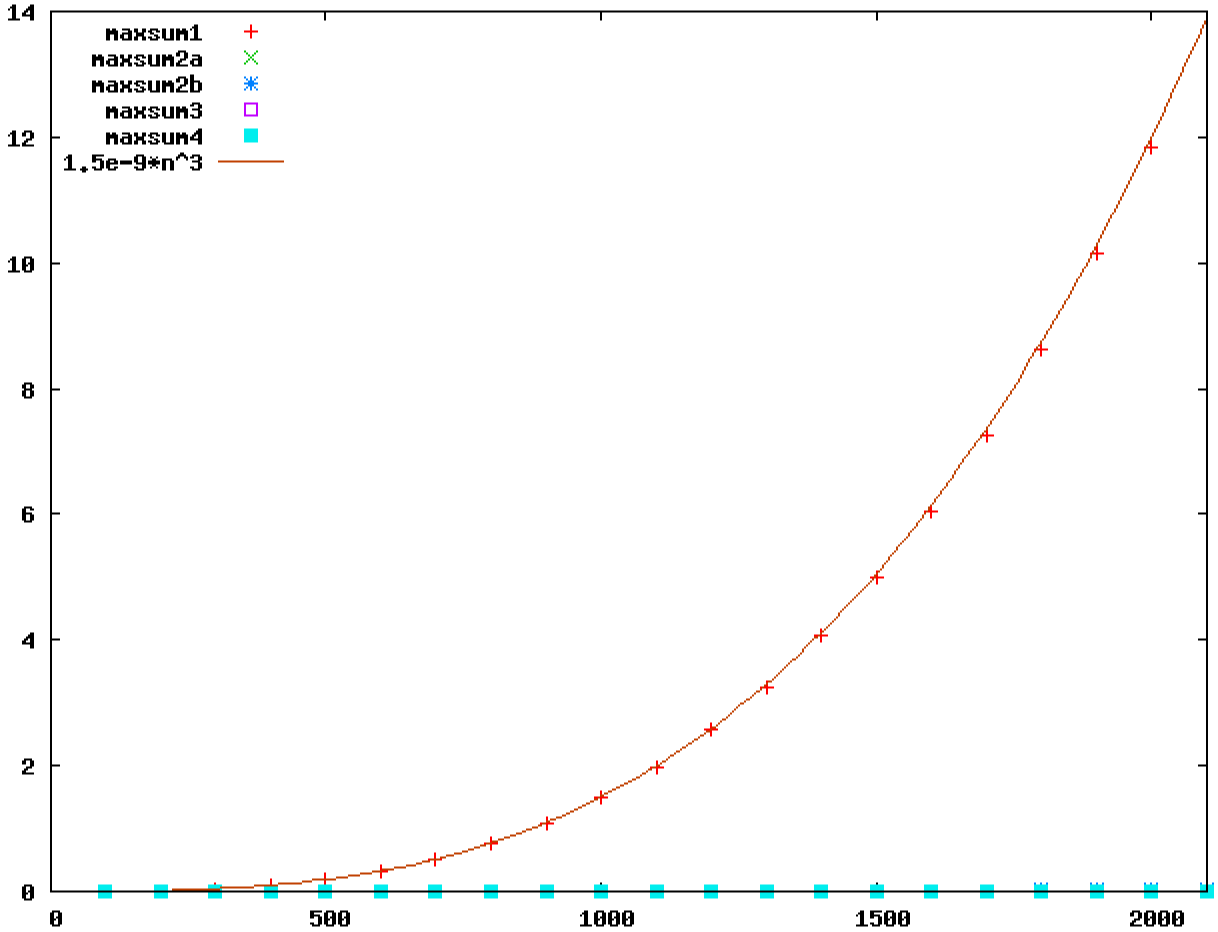
Algorithm		1	2	3	4
Run time in nanoseconds		$1.3n^3$	$10n^2$	$47n \log_2 n$	$48n$
Time to solve a problem of size	10^3	1.3 secs	10 msecs	.4 msecs	.05 msecs
	10^4	22 mins	1 sec	6 msecs	.5 msecs
	10^5	15 days	1.7 min	78 msecs	5 msecs
	10^6	41 yrs	2.8 hrs	.94 secs	48 msecs
	10^7	41 millennia	1.7 wks	11 secs	.48 secs
Max size problem solved in one	sec	920	10,000	1.0×10^6	2.1×10^7
	min	3600	77,000	4.9×10^7	1.3×10^9
	hr	14,000	6.0×10^5	2.4×10^9	7.6×10^{10}
	day	41,000	2.9×10^6	5.0×10^{10}	1.8×10^{12}
If n multiplies by 10, time multiplies by		1000	100	10+	10
If time multiplies by 10, n multiplies by		2.15	3.16	10–	10

Sammenligning: n^3 og n

n	ALPHA 21164A, C, CUBIC ALGORITHM	TRS-80, BASIC, LINEAR ALGORITHM
10	0.6 microsecs	200 millisecs
100	0.6 millisecs	2.0 secs
1000	0.6 secs	20 secs
10,000	10 mins	3.2 mins
100,000	7 days	32 mins
1,000,000	19 yrs	5.4 hrs



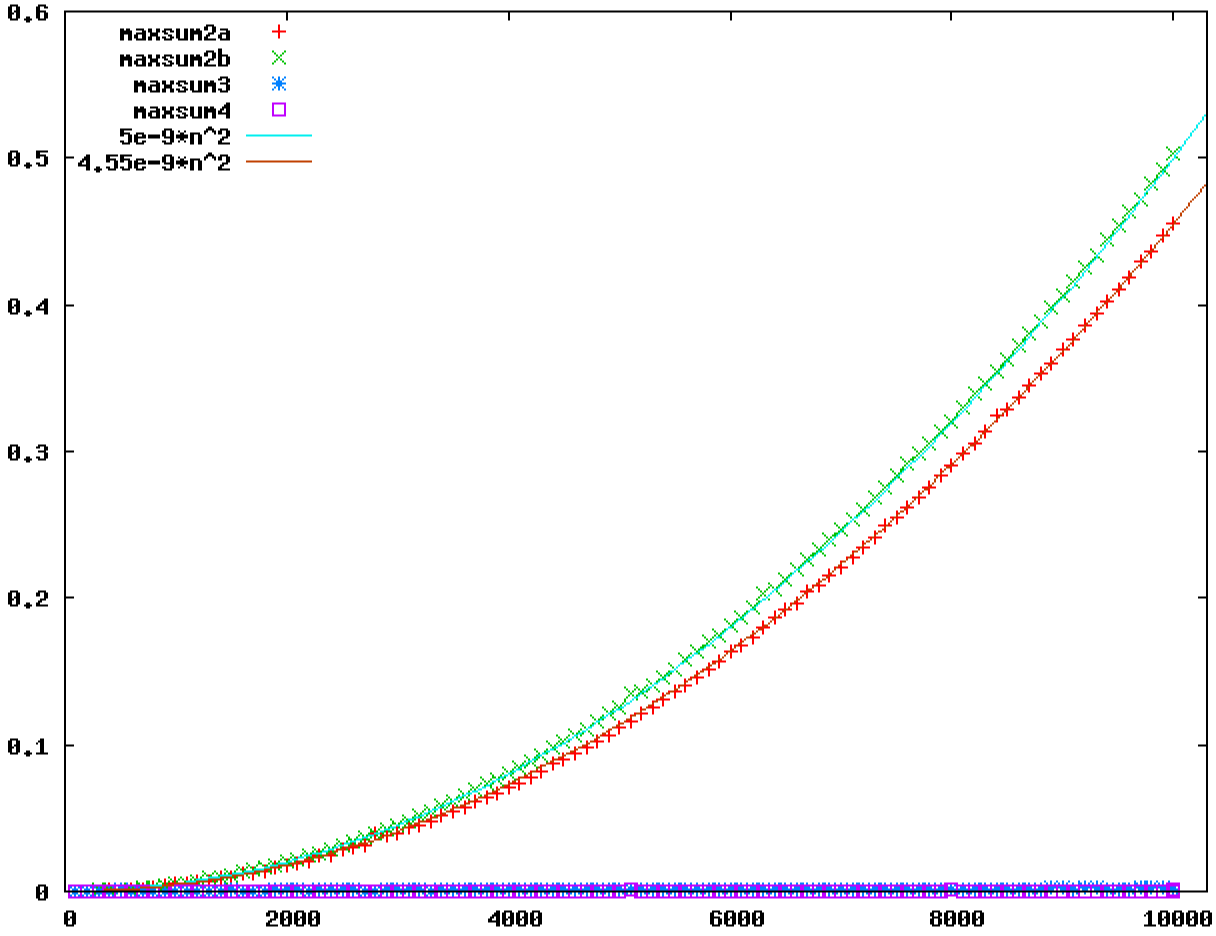
Sammenligning 2009



maxsum1 ≈ n^3

x-akse = n, y = sekunder, hvert eksperiment gennemsnit af 10 kørsler (gcc 4.1.2, C, Linux 2.6.18, Intel Xeon 3 GHz)

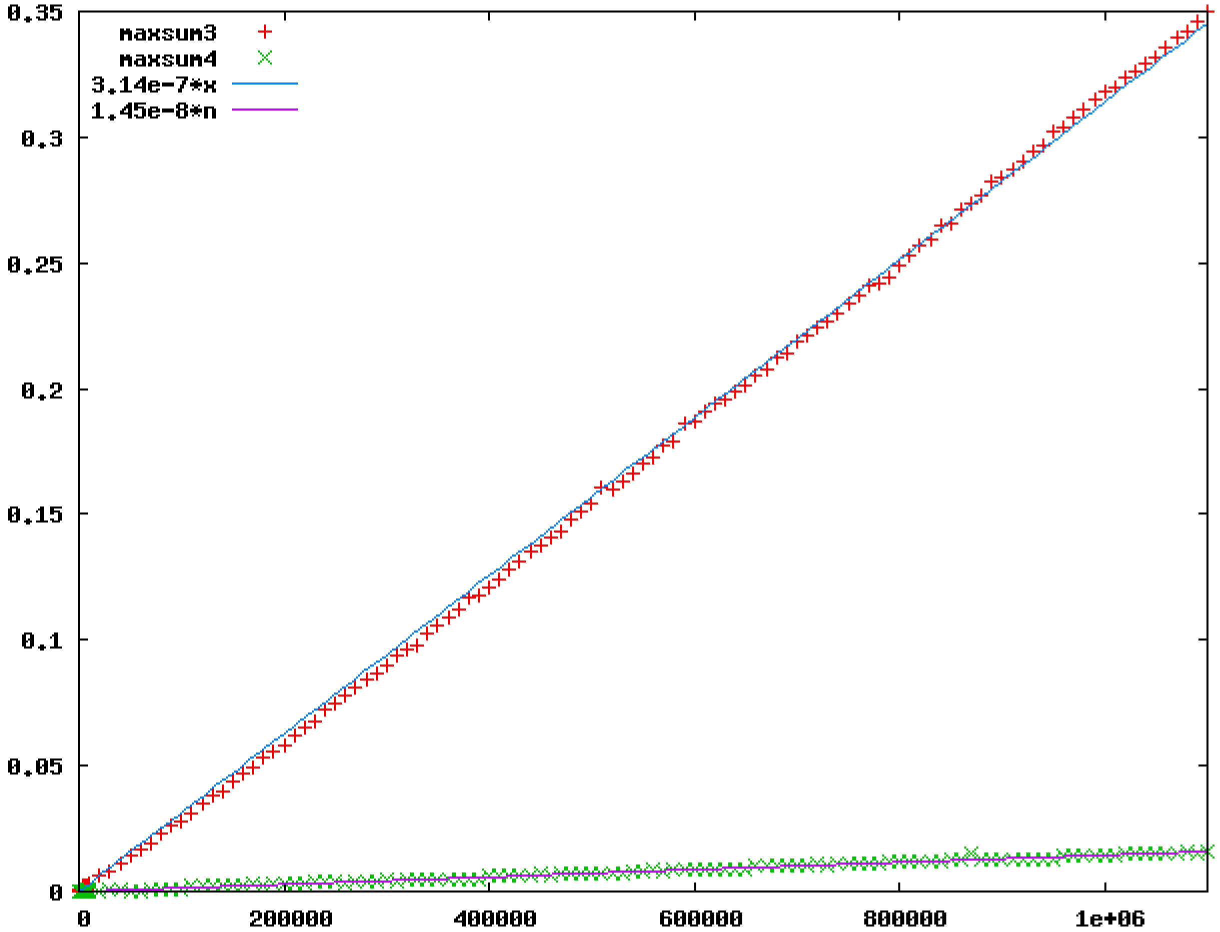
Sammenligning 2009



maxsum2a og maxsum2b ≈ n^2

x-akse = *n*, *y* = sekunder, hvert eksperiment gennemsnit af 10 kørsler (gcc 4.1.2, C, Linux 2.6.18, Intel Xeon 3 GHz)

Sammenligning 2009



maxsum3 og maxsum4 ≈ *n* ???

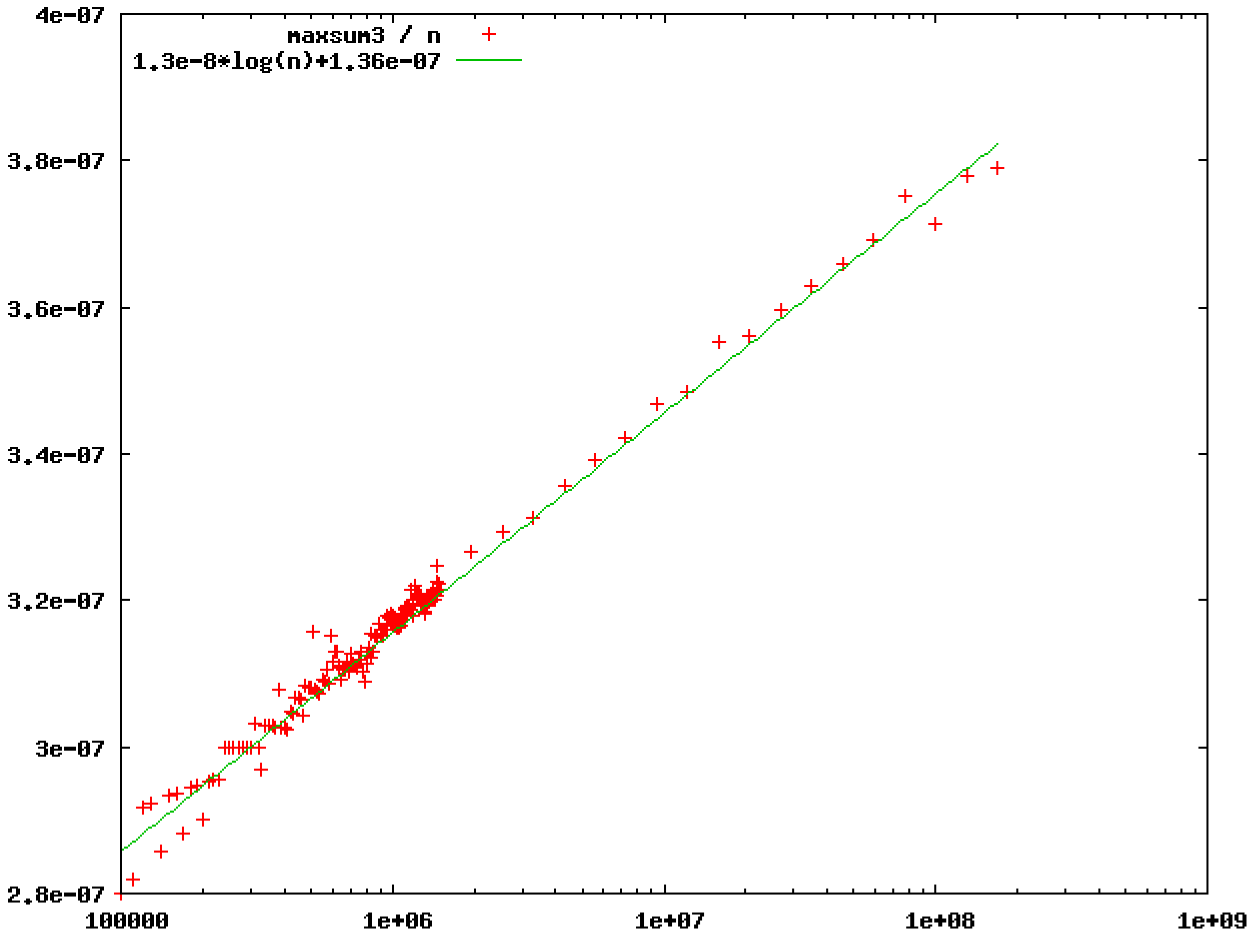
x-akse = *n*, *y* = sekunder, hvert eksperiment gennemsnit af 10 kørsler (gcc 4.1.2, C, Linux 2.6.18, Intel Xeon 3 GHz)

Sammenligning 2009

maxsum4 ≈ *n*

x-akse = *n*, *y* = sekunder, hvert eksperiment gennemsnit af 10 kørsler (gcc 4.1.2, C, Linux 2.6.18, Intel Xeon 3 GHz)

Sammenligning 2009



$$\text{maxsum3} \approx c_1 \cdot n \cdot \log n + c_2 \cdot n$$

x-akse = *n*, *y* = sekunder, hvert eksperiment gennemsnit af 10 kørsler (gcc 4.1.2, C, Linux 2.6.18, Intel Xeon 3 GHz)

Algoritmisk indsigt...

- Gode idéer kan give hurtige algoritmer
- Generelle algoritme teknikker
  - Del-og-kombiner
  - Inkrementel
- Analyse af udførelsestid (her additioner)
- Argumenteret for korrektheden
- Invarianter