

INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Science and Technology
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12
Eksamensdag: Mandag den 4. april 2016, kl. 9.00-11.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort _____

Navn _____

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Institut for Datalogi
Aarhus Universitet

Mandag den 4. april 2016, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en mængde multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

Hvert delspørgsmål har præcist et rigtigt svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge **max ét svar** ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af opgaven som:

$$\frac{s}{n} \cdot v \%$$

Bemærk at det er muligt at få negative point for en opgave.

Opgave 3 (10 %)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
s = 0
for i = 1 to n
    s = s + i
```

Algoritme Loop2(n)

```
i = 1
while i ≤ n
    j = n
    while j > 0
        j = j - 1
    i = i * 2
```

Algoritme Loop3(n)

```
i = 0
while i ≤ n
    j = i
    while j > 0
        j = ⌊j/2⌋
    i = i + 1
```

Algoritme Loop4(n)

```
i = 1
while i ≤ n
    j = 1
    while j ≤ i
        j = j * 2
    i = i * 2
```

Algoritme Loop5(n)

```
i = 1
s = 0
while s ≤ n
    j = 1
    while j ≤ i
        j = j + 1
    s = s + i
    i = i + 1
```

Algoritme Loop6(n)

```
i = 1
j = 1
s = 0
while s ≤ n
    while j ≤ s
        j = 2 * j
    s = s + i
    i = i + 1
```

	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n\sqrt{n})$	$O(\sqrt{n})$	$O(n^3)$	$O((\log n)^2)$
Loop1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Loop5	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 4 (4 %)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	11	5	10	7	1	2	4	8	6	3

Angiv hvordan ovenstående binære max-heap ser ud efter HEAP-EXTRACT-MAX.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<input type="checkbox"/>
11	7	5	10	3	1	2	4	8	6	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<input type="checkbox"/>
11	5	10	7	1	2	4	8	6	3	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<input checked="" type="checkbox"/>
11	10	5	8	7	1	2	4	3	6	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<input type="checkbox"/>
11	10	8	7	6	5	4	3	2	1	

Opgave 5 (4%)

Angiv den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 3, 2, 5, 4, 6 og 7 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 7 | 4 | 6 | 3 | 1 | 2 | 5 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 7 | 6 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 7 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 | 2 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 7 | 4 | 6 | 1 | 3 | 2 | 5 | <input checked="" type="checkbox"/> |

Opgave 6 (4%)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	5	7	9	2	4	6	8	10

Angiv hvordan ovenstående array ser ud efter anvendelsen af BUILD-MAX-HEAP.

- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 9 | 5 | 8 | 3 | 2 | 4 | 6 | 7 | 1 | <input checked="" type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 8 | 4 | 7 | 9 | 2 | 1 | 6 | 5 | 3 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 9 | 8 | 5 | 6 | 7 | 4 | 2 | 3 | 1 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 8 | 9 | 5 | 2 | 6 | 7 | 4 | 3 | 1 | <input type="checkbox"/> |

Opgave 7 (4%)

Betragt RADIX-SORT anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 5, k = 2$).

20020 11111 20120 10020 10111

Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de tre mindst betydende cifre.

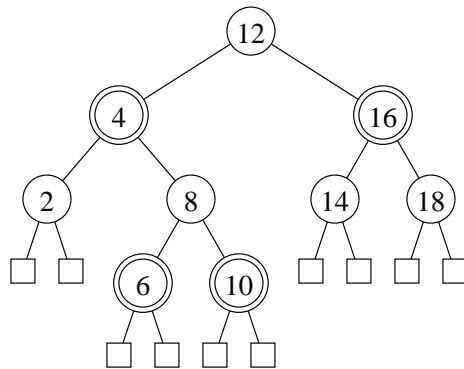
- | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------|
| 11111 | 10111 | 20020 | 20120 | 10020 | <input type="checkbox"/> |
| 10020 | 20020 | 10111 | 11111 | 20120 | <input type="checkbox"/> |
| 10020 | 10111 | 11111 | 20020 | 20120 | <input type="checkbox"/> |
| 20020 | 10020 | 11111 | 10111 | 20120 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 11111 | 10111 | 20120 | 20020 | 10020 | <input type="checkbox"/> |

Opgave 10 (4%)

For hver af nedenstående delmængder, angiv om nedenstående binære træ er et lovligt rød-sort træ hvis netop disse knuder farves røde

	Ja	Nej
2, 5, 8, 12, 14, 15	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2, 6, 9, 12, 14, 15	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10, 14	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2, 5, 9, 10, 13, 17	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
1, 3, 6, 9, 12, 14, 15	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 11 (4%)



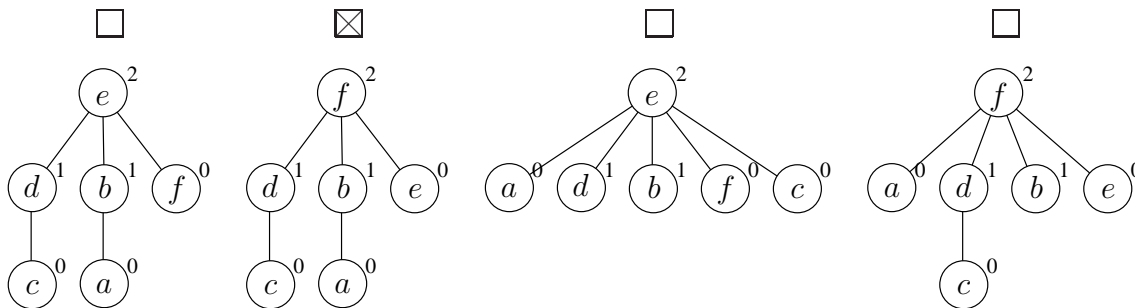
Angiv det resulterende rød-sort træ når man indsætter 7 i ovenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder).

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Opgave 12 (4%)

Angiv den resulterende union-find struktur efter nedenstående sekvens af operationer, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering.

- makeset(a)
- makeset(b)
- makeset(c)
- makeset(d)
- makeset(e)
- makeset(f)
- union(a, b)
- union(c, d)
- union(e, f)
- union(c, e)
- union(a, f)
- find(f)



Opgave 13 (4%)

I følgende hashtabel er anvendt *linear probing* med hashfunktionen $h(k) = (3k + 2) \bmod 7$.

0	1	2	3	4	5	6
4		0				13

Angiv positionerne de tre elementer 2, 6 og 7 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 0, 4 og 13).

	0	1	2	3	4	5	6
Insert(2)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(6)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(7)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 14 (4%)

I følgende hashtabel af størrelse 11 er anvendt *kravdratisk probing* med hashfunktionen $h(k, i) = (2k + 3i + i^2) \text{ mod } 11$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				13				4		16

Angiv positionerne de tre elementer 7, 5 og 2 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 4, 13 og 16).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Insert(7)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(2)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 15 (4%)

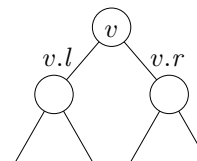
Betragt en liste af n punkter $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, hvor x_i og y_i er reelle tal og $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Vi ønsker at finde en sammenhængende række af punkter

$$(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), \dots, (x_{j-1}, y_{j-1}), (x_j, y_j),$$

hvor $i \leq j$, således at $Y_{i,j} = \sum_{k=i}^j y_k = y_i + y_{i+1} + \dots + y_{j-1} + y_j$ er størst mulig. Vi ønsker for en dynamisk liste af punkter at vedligeholde denne maksimale sammenhængende y -sum, *maxysum*.

Betragt et søgetræ hvor hver knude v gemmer et punkt $(v.x, v.y)$, og knuderne er ordnet venstre-mod-højre efter stigende $v.x$. Derudover gemmes i en knude v , der i undertræet indeholder punkterne $(x_k, y_k), \dots, (x_\ell, y_\ell)$ fire værdier $v.sum = Y_{k,\ell}$, $v.maxysum = \max_{k \leq i \leq j \leq \ell} Y_{i,j}$, $v.pre = \max\{0, \max_{k \leq j \leq \ell} Y_{k,j}\}$, og $v.suf = \max\{0, \max_{k \leq i \leq \ell} Y_{i,\ell}\}$.

Angiv hvorledes $v.sum$ og $v.maxysum$ kan beregnes når den tilsvarende information (incl. *pre* og *suf*) er kendt ved de to børn $v.l$ og $v.r$ (det kan antages at disse begge eksisterer).



$$v.sum = \begin{cases} v.l.sum + v.r.sum & \square \\ v.l.sum + v.y + v.r.sum & \otimes \\ v.l.suf + v.r.pre & \square \\ v.l.suf + v.y + v.r.pre & \square \end{cases}$$

$$v.maxysum = \begin{cases} \max\{v.l.maxysum, v.r.maxysum\} & \square \\ \max\{v.l.maxysum, v.y, v.r.maxysum\} & \square \\ \max\{v.l.maxysum, v.l.suf + v.y + v.r.pre, v.r.maxysum\} & \otimes \\ \max\{v.l.maxysum, v.l.suf + v.r.pre, v.r.maxysum\} & \square \end{cases}$$

Transitionssystem DIVIDE
Konfigurationer: $\{[x, y, q, r, p] \mid \text{heltal } x, q, r \geq 0 \text{ og } y, p \geq 1\}$

$[x, y, q, r, p] \triangleright [x, y, q, r, \lfloor p/2 \rfloor] \quad \text{if } p \geq 2$
 $[x, y, q, r, p] \triangleright [x - yp, y, q + p, r, p] \quad \text{if } x \geq yp$
 $[x, y, q, r, p] \triangleright [0, y, q, r + x, p] \quad \text{if } 0 < x < y$

Opgave 16 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem DIVIDE. Startkonfigurationen antages at være $[x_0, y_0, 0, 0, x_0]$, hvor $x_0 \geq 0$ og $y_0 \geq 1$.

	Ja	Nej
$x_0 = qy + r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$x_0 = x + qy + r$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x_0 = x - (qy + r)$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$x \leq p$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$p \geq 1$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 17 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem DIVIDE.

	Ja	Nej
$\mu(x, y, q, r, p) = x$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(x, y, q, r, p) = x + p$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, y, q, r, p) = x + r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(x, y, q, r, p) = x - yp$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(x, y, q, r, p) = qy + r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Opgave 18 (4%)

Betragt en kø implementeret i et cyklisk array Q , hvor $Q.head$ angiver hovedet af køen og $Q.tail$ er den næste ledige plads i køen (som beskrevet i [CLRS]).

Hvilke af følgende funktioner beregner korrekt størrelsen af køen?

	Ja	Nej
$Q.tail - Q.head$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$ Q.tail - Q.head $	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$ Q.tail - Q.head \bmod Q.length$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$(Q.tail - Q.head + Q.length - 1) \bmod Q.length$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$(Q.tail - Q.head + Q.length) \bmod Q.length$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Antag at et sorteret array $A[1..n]$ indeholder $n \geq 2$ forskellige heltal, dvs. $A[1] < A[2] < \dots < A[n-1] < A[n]$. Givet et positivt heltal $x > 0$, identificerer nedenstående algoritme om der findes $1 \leq i < j \leq n$, hvor $x = A[j] - A[i]$.

Algoritme FINDDIFF($A[1..n], x$)

Inputbetingelse : Sorteret array $A[1..n]$ med n forskellige heltal, heltal $x > 0$

Outputkrav : $1 \leq i < j \leq n$, hvor $x = A[j] - A[i]$;
ellers $j > n$ hvis intet sådant par findes

Metode : $i \leftarrow 1$;
 $j \leftarrow 1$;
{ I } **while** $j \leq n$ **and** $x \neq A[j] - A[i]$ **do**
 if $x > A[j] - A[i]$ **then**
 $j \leftarrow j + 1$
 else
 $i \leftarrow i + 1$

Opgave 19 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme FINDDIFF.

	Ja	Nej
$i \leq j$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1 \leq i \leq j \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$x \neq A[j] - A[i]$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
For alle $1 \leq i' < j' \leq n : (i' \geq i \vee j' \geq j) \Rightarrow x \neq A[j'] - A[i']$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
For alle $1 \leq i' < j' \leq n : (i' < i \vee j' < j) \Rightarrow x \neq A[j'] - A[i']$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 20 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme FINDDIFF.

	Ja	Nej
$\mu(i, j, n) = i + j$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = j - i$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = 2n - i - j$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = 2n + 1 - i - j$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, j, n) = 3n + 2(j - i)$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Opgave 21 (4 %)

Lad $\|x\|$ betegne antal bit med værdien 1 i den binære repræsentation af et ikke-negativt heltal x , f.eks. $\|14_{10}\| = \|1110_2\| = 3$. Nedenstående algoritme beregner $\|x\|$.

```
Algoritme BITS( $x$ )  
Inputbetingelse : Heltal  $x \geq 0$   
Outputkrav      :  $r = \|x\|$   
Metode          :  $r \leftarrow 0$ ;  
                   $\{I\}$  while  $x > 0$  do  
                    if  $x$  ulige then  
                       $x \leftarrow x - 1$ ;  
                       $r \leftarrow r + 1$   
                       $x \leftarrow x/2$ 
```

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme BITS, hvor x_0 angiver den initielle værdi af x .

	Ja	Nej
$r = \ x\ $	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$r + \ x\ = \ x_0\ $	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r + \ x_0\ = \ x\ $	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$r + \ x\ \leq x_0$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\ x\ + 2^r = x_0$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Opgave 22 (4 %)

Betragt en uordnet liste af n heltal, hvor vi i $O(1)$ tid kan indsætte et nyt heltal, og i $O(n)$ tid kan udføre operationen NEGATEREMOVE, som fjerner alle ikke-positive tal ($x \leq 0$) fra listen og erstatter ethvert positivt heltal $y > 0$ med det tilsvarende negative heltal $-y$. F.eks. $\text{NEGATEREMOVE}(3, -4, -2, 7, 6, -2) = (-3, -7, -6)$.

Med en passende potentialefunktion kan man argumentere for at både indsættelser og NEGATEREMOVE tager amortiseret $O(1)$ tid. Angiv for hver af nedenstående om dette er en sådan potentialefunktion Φ , hvor P er antal positive tal i listen og N er antal ikke-positive tal i listen.

	Ja	Nej
N	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
P	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$2N + P$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$N + P$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$N + 2P$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>