

INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Science and Technology
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12 (tolv)
Eksamensdag: Tirsdag den 31. marts 2015, kl. 9.00-11.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort _____

Navn _____

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Institut for Datalogi
Aarhus Universitet

Tirsdag den 31. marts 2015, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en mængde multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

Hvert delspørgsmål har præcist et rigtigt svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge **max ét svar** ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af opgaven som:

$$\frac{s}{n} \cdot v \%$$

Bemærk at det er muligt at få negative point for en opgave.

Opgave 1 (10 %)

I det følgende angiver $\log n$ 2-tals-logaritmen af n .

	Ja	Nej
n er $O(n^2)$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$3n^2 + 7n$ er $O(2n^2 + n)$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$3\sqrt{n}$ er $O(\log n)$?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$(n \log n)^2$ er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
3^n er $O(n^4)$?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$(\frac{1}{n})^2$ er $O((\frac{1}{n})^3)$?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\frac{1}{n}$ er $O(1)$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$5n^7$ er $O(2^n)$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$13 \log n$ er $O(\sqrt{n})$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$13n^4 + 2n^2 + 7$ er $O(n^{13})$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\frac{2}{3})^n$ er $O(\frac{3}{2}n)$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n(\log n)^2$ er $O(n^2)$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\frac{n}{\log n}$ er $O(\sqrt{n})$?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\frac{n^7}{7^n}$ er $O(1)$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
n^2 er $\Omega(n^3)$?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$2^{\log n}$ er $O(n)$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$2^{3 \log n}$ er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$(\log n)^3$ er $O(3^{\log n})$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^{1/2}$ er $O((\frac{1}{2})^n)$?	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$4^{\log n}$ er $\Theta(n^2)$?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 2 (4 %)

Betragt et vilkårligt binært søgetræ, og lad k være et element i et blad i søgetræet. Lad B være alle elementerne på stien fra roden ned til k , og lad A være alle elementer til venstre for stien, og C alle elementer til højre for stien. Gælder følgende udsagn altid for alle $a \in A$, $b \in B$ og $c \in C$?

	Ja	Nej
$a \leq b$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$b \leq c$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$a \leq c$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 3 (10%)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)
 $s = 0$
for $i = 1$ **to** n
 for $j = i$ **to** n
 $s = s + 1$

Algoritme Loop2(n)
 $i = 1$
while $i \leq n$
 $j = i$
 while $j > 1$
 $j = j/2$
 $i = i + i$

Algoritme Loop3(n)
 $s = n$
 $i = 1$
while $s \geq 0$
 $s = s - i$
 $i = i + 1$

Algoritme Loop4(n)
 $i = 1$
 $j = 1$
while $i \leq n$
 while $j \leq i$
 $j = j + 1$
 $i = i * 2$

Algoritme Loop5(n)
 $i = 1$
while $i \leq n$
 $j = 1$
 while $j \leq i$
 $j = j + 1$
 $i = i * 2$

Algoritme Loop6(n)
 $i = 1$
while $i \leq n$
 $j = 1$
 while $j \leq i$
 $j = 2 * j$
 $i = i + 1$

	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n\sqrt{n})$	$O(\sqrt{n})$	$O(n^3)$	$O((\log n)^2)$
Loop1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Loop3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop4	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop5	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 4 (4%)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
14	10	9	4	6	7	8	3	2	5	1

Angiv hvordan ovenstående binære max-heap ser ud efter HEAP-EXTRACT-MAX.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<input type="checkbox"/>
10	9	8	4	6	7	1	3	2	5	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<input checked="" type="checkbox"/>
10	6	9	4	5	7	8	3	2	1	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<input type="checkbox"/>
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<input type="checkbox"/>
10	7	9	4	6	1	8	3	2	5	

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 5 (4%)

Angiv den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 5, 2, 4, 7, 3, 6, og 9 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 7 | 5 | 6 | 4 | 3 | 2 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 6 | 7 | 2 | 3 | 4 | 5 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 5 | 7 | 2 | 3 | 4 | 6 | <input checked="" type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 9 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | <input type="checkbox"/> |

Opgave 6 (4%)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	5	1	8	6	3	2	9	4	10

Angiv hvordan ovenstående array ser ud efter anvendelsen af BUILD-MAX-HEAP.

- | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|---|---|---|----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 7 | 8 | 3 | 9 | 10 | 1 | 2 | 5 | 4 | 6 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 9 | 3 | 8 | 6 | 1 | 2 | 7 | 4 | 5 | <input checked="" type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 9 | 8 | 5 | 6 | 7 | 4 | 2 | 3 | 1 | <input type="checkbox"/> |

Opgave 7 (4%)

Betragt RADIX-SORT anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 5$, $k = 4$).

12343 34321 34243 11321 21343

Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de *to* mindst betydende cifre.

- | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------|
| 11321 | 12343 | 21343 | 34243 | 34321 | <input type="checkbox"/> |
| 34321 | 11321 | 12343 | 21343 | 34243 | <input type="checkbox"/> |
| 34321 | 11321 | 12343 | 34243 | 21343 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 11321 | 34321 | 12343 | 21343 | 34243 | <input type="checkbox"/> |
| 12343 | 34321 | 34243 | 11321 | 21343 | <input type="checkbox"/> |

Opgave 8 (4%)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
21	5	2	15	14	1	12	8	6	11	13	16	33	3

Angiv resultatet af at anvende $\text{PARTITION}(A,3,10)$ på ovenstående array.

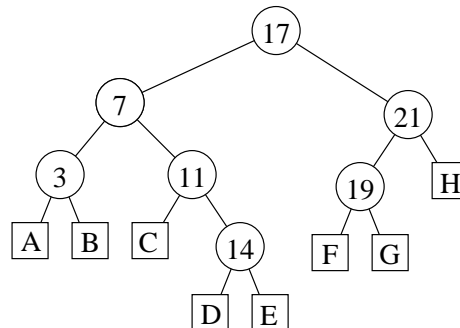
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	1	3	5	8	6	21	15	14	12	11	13	16	33

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
21	5	2	1	8	6	11	15	14	12	13	16	33	3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
21	5	2	1	8	6	11	14	15	12	13	16	33	3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
21	5	2	1	8	6	11	12	14	15	13	16	33	3

Opgave 9 (4%)

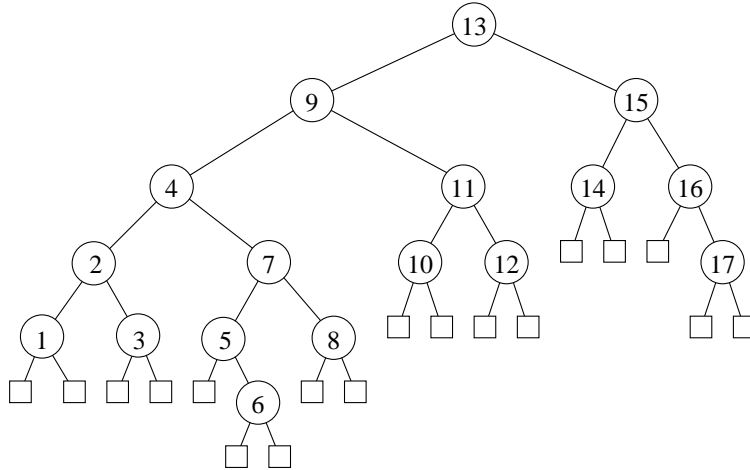


Angiv i hvilke blade A-H i ovenstående ubalancerede binære søgetræ elementerne 10, 6, 18, 12 og 16 skal indsættes.

	A	B	C	D	E	F	G	H
Insert(10)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(6)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(18)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(12)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(16)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

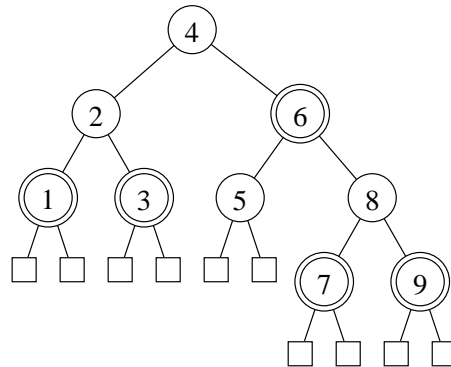
Opgave 10 (4%)

For hver af nedenstående delmængder, angiv om nedenstående binære træ er et lovligt rød-sort træ hvis netop disse knuder farves røde

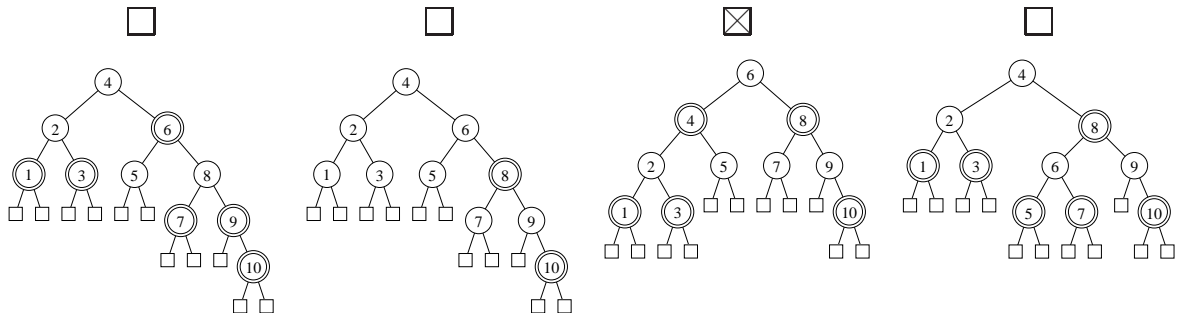


	Ja	Nej
4, 6, 7, 9	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2, 6, 7, 9, 17	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4, 5, 11, 16	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
4, 5, 9, 16	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
1, 3, 6, 7, 9, 17	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 11 (4%)



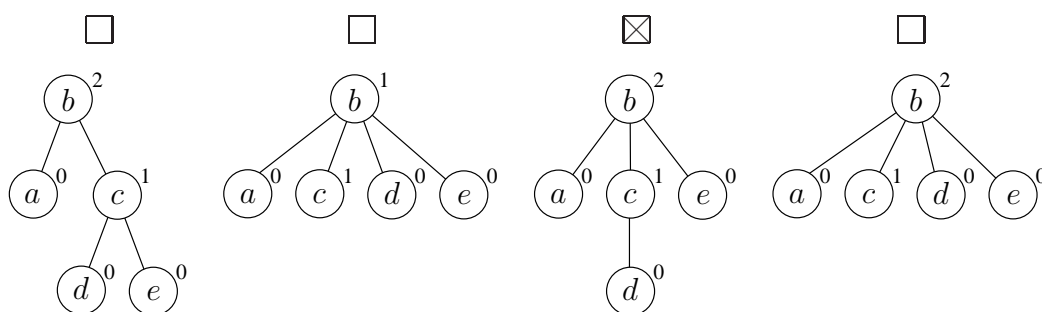
Angiv det resulterende rød-sort træ når man indsætter 10 i ovenstående rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder).



Opgave 12 (4%)

Angiv den resulterende union-find struktur efter nedenstående sekvens af operationer, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering.

makeset(a)
 makeset(b)
 makeset(c)
 makeset(d)
 makeset(e)
 union(a, b)
 union(d, c)
 union(d, e)
 union(d, a)
 find(e)



Opgave 13 (4%)

I følgende hashtabel er anvendt *linear probing* med hashfunktionen $h(k) = 2k \bmod 7$.

0	1	2	3	4	5	6
	18			16	2	

Angiv positionerne de tre elementer 4, 5 og 9 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 2, 16 og 18).

	0	1	2	3	4	5	6
Insert(4)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(9)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Opgave 14 (4%)

I følgende hashtabel af størrelse 7 er anvendt *dobbelt hashing* med hashfunktionerne $h_1(k) = 2k \bmod 9$ og $h_2(k) = 1 + (3k \bmod 5)$.

0	1	2	3	4	5	6
	4	10		2		

Angiv positionerne de tre elementer 1, 3 og 5 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hash tabellen kun indeholder elementerne 2, 4 og 10).

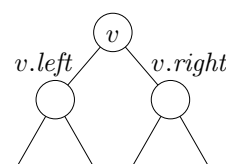
	0	1	2	3	4	5	6
Insert(1)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Insert(3)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Insert(5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 15 (4%)

Betragt en liste af n punkter $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, hvor x_i og y_i er reelle tal og $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Et punkt (x_i, y_i) er domineret af et punkt (x_j, y_j) hvis $x_i \leq x_j$ og $y_i \leq y_j$. En liste af punkter er *dominans-fri* hvis og kun hvis intet punkt i listen er domineret af et andet punkt. F.eks. er listen $(3, 7), (5, 3), (7, 6), (13, 4)$ *ikke* dominans-fri, da $(5, 3)$ er domineret af $(13, 4)$. Vi ønsker for en dynamisk liste af punkter at vedligeholde udsagnet om listen er dominans-fri.

Betragt et søgetræ hvor hver knude v gemmer et punkt $(v.x, v.y)$, og knuderne er ordnet venstre-mod-højre efter stigende $v.x$. Derudover gemmes i v også $v.DF$ og $v.miny$ og $v.maxy$, hvor $v.DF$ er sand hvis og kun hvis mængden af punkterne i v 's undertræ er dominans-fri, og $v.miny$ og $v.maxy$ er den mindste og største y værdi gemt i v 's undertræ.

Angiv hvorledes $v.miny$ og $v.DF$ kan beregnes når den tilsvarende information (incl. $maxy$) er kendt ved de to børn $v.left$ og $v.right$ (det kan antages at disse begge eksisterer).



$$v.miny = \begin{cases} v.left.miny & \square \\ \min\{v.left.miny, v.right.miny\} & \square \\ \min\{v.left.miny, v.y, v.right.miny\} & \boxtimes \end{cases}$$

$$v.DF = \begin{cases} v.left.DF \wedge v.right.DF & \square \\ v.left.DF \wedge v.right.DF \wedge v.y < v.left.miny \wedge v.y > v.right.maxy & \boxtimes \\ v.left.DF \wedge v.right.DF \wedge v.y > v.left.miny \wedge v.y < v.right.maxy & \square \\ v.left.DF \wedge v.right.DF \wedge v.y < v.left.miny & \square \end{cases}$$

Transitionssystem LOG2

Konfigurationer: $\{[r, n] \mid \text{heltal } r \geq 0 \text{ og } n \geq 1\}$

$[r, n] \triangleright [r + 1, n/2]$ **if** $n > 1 \wedge n$ lige

$[r, n] \triangleright [r, n - 1]$ **if** $n > 1 \wedge n$ ulige

Opgave 16 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem LOG2. Startkonfigurationen antages at være $[0, n_0]$, hvor $n_0 \geq 1$. I det følgende betegner $\text{intlog}(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$, dvs. den heltallige 2-tals-logaritme af x .

	Ja	Nej
$r \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$2^r = n_0/n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\text{intlog}(n) = \text{intlog}(n_0)$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$r + \text{intlog}(n) = \text{intlog}(n_0)$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1 \leq n \leq n_0$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 17 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem LOG2.

	Ja	Nej
$\mu(r, n) = r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(r, n) = n - r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(r, n) = n$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(r, n) = n + r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(r, n) = 2n + r$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 18 (4%)

Givet to søgetræer T_1 og T_2 indeholdende de samme n elementer, så kan T_1 transformeres til T_2 ved en række rotationer. Hvad er worst-case antallet af rotationer der er krævet for at transformere et søgetræ med n elementer til et andet søgetræ T_2 indeholdende de samme n elementer?

$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Antag at et array $A[1..n-1]$ indeholder $n-1$ forskellige tal fra mængden $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, hvor $n \geq 2$. Nedenstående algoritme Missing identificerer det element $r \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ som ikke er i A .

Algoritme Missing($A[1..n-1]$)

Inputbetingelse : Array $A[1..n-1]$ med $n-1 \geq 1$ forskellige heltal fra $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

Outputkrav : $r \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \setminus A$

Metode : $i \leftarrow 1$;
 $x \leftarrow 1$;
 $y \leftarrow A[1]$;
{I} **while** $i < n-1$ **do**
 $i \leftarrow i+1$;
 $x \leftarrow x+i$;
 $y \leftarrow y+A[i]$
 $r \leftarrow n+x-y$

Opgave 19 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Missing.

	Ja	Nej
$1 \leq i \leq n-1$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$y = x - i + A[i]$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$x = i(i+1)/2$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$y = \sum_{j=1}^i A[j]$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i = i+1$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Opgave 20 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Missing.

	Ja	Nej
$\mu(n, i, x, y) = i$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(n, i, x, y) = n - i$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, i, x, y) = n - x$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\mu(n, i, x, y) = n^2 - x$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(n, i, x, y) = n^2 - y$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 21 (4%)

Nedenstående algoritme beregner den heltallige 2-tals-logaritme af n , dvs. $\text{intlog}(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

```
Algoritme LOG2( $n$ )  
Inputbetingelse : Heltal  $n \geq 2$   
Outputkrav      :  $r = \text{intlog}(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$   
Metode          :  $i \leftarrow 1$ ;  
                  $r \leftarrow 1$ ;  
                  $p \leftarrow 2$ ;  
                 { $I$ } while  $2p \leq n$  do  
                   if  $p * p \leq n$  then  
                      $p \leftarrow p * p$ ;  
                      $r \leftarrow 2 * r$   
                   else  
                      $p \leftarrow 2 * p$ ;  
                      $r \leftarrow r + 1$ 
```

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme LOG2.

	Ja	Nej
$1 \leq r < p$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$2p \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$p = 2^r$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$p = 2r$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$p = 2^{\text{intlog}(p)}$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 22 (4%)

Betragt et rød-sort søgetræ udvidet med operation $\text{INSERTCUT}(x)$, som indsætter elementet x i søgetræet og sletter alle elementer der er mindre end x fra søgetræet. Hvis indsættelsen sletter k elementer, så tager dette worst-case tid $O((k+1)\log n)$, hvor n er antal elementer i træet før INSERTCUT udføres. Med en passende potentialefunktion kan man argumentere for at INSERTCUT tager amortiseret $O(\log n)$. Angiv for hver af nedenstående om dette er en sådan potentialefunktion Φ .

	Ja	Nej
$\log n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$n \log n$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
n	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\sum_{i=1}^n \log i$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$k \log n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>