Algoritmer og Datastrukturer 1

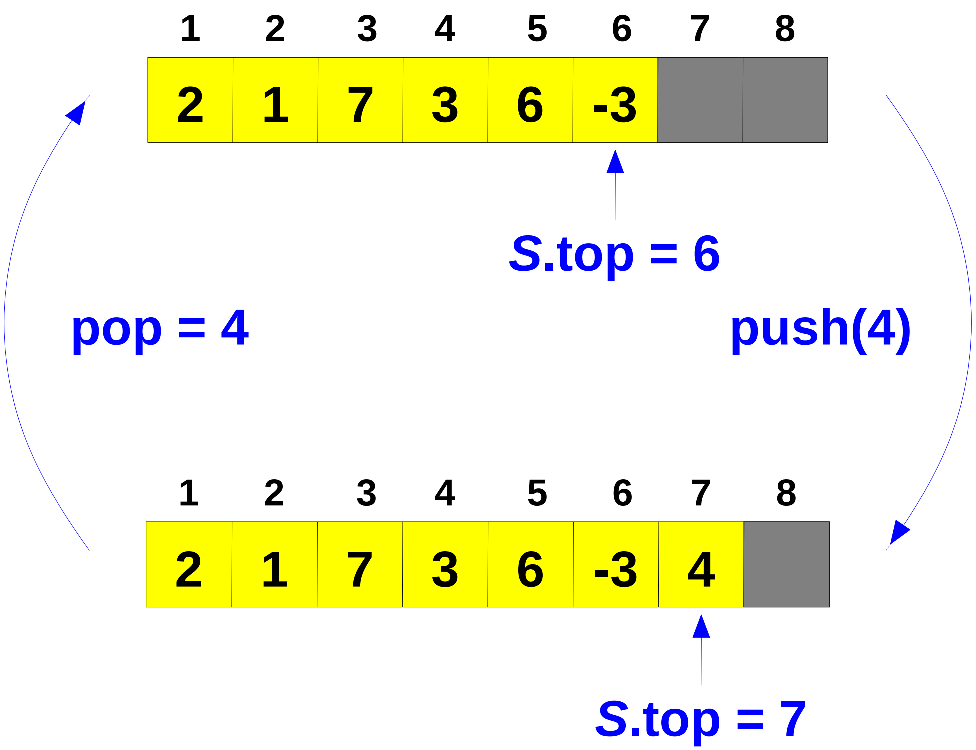
Gerth Stølting Brodal

Amortiseret Analyse [CLRS, kapitel 17]

AARHUS UNIVERSITET

Stak

Stak : Array Implementation



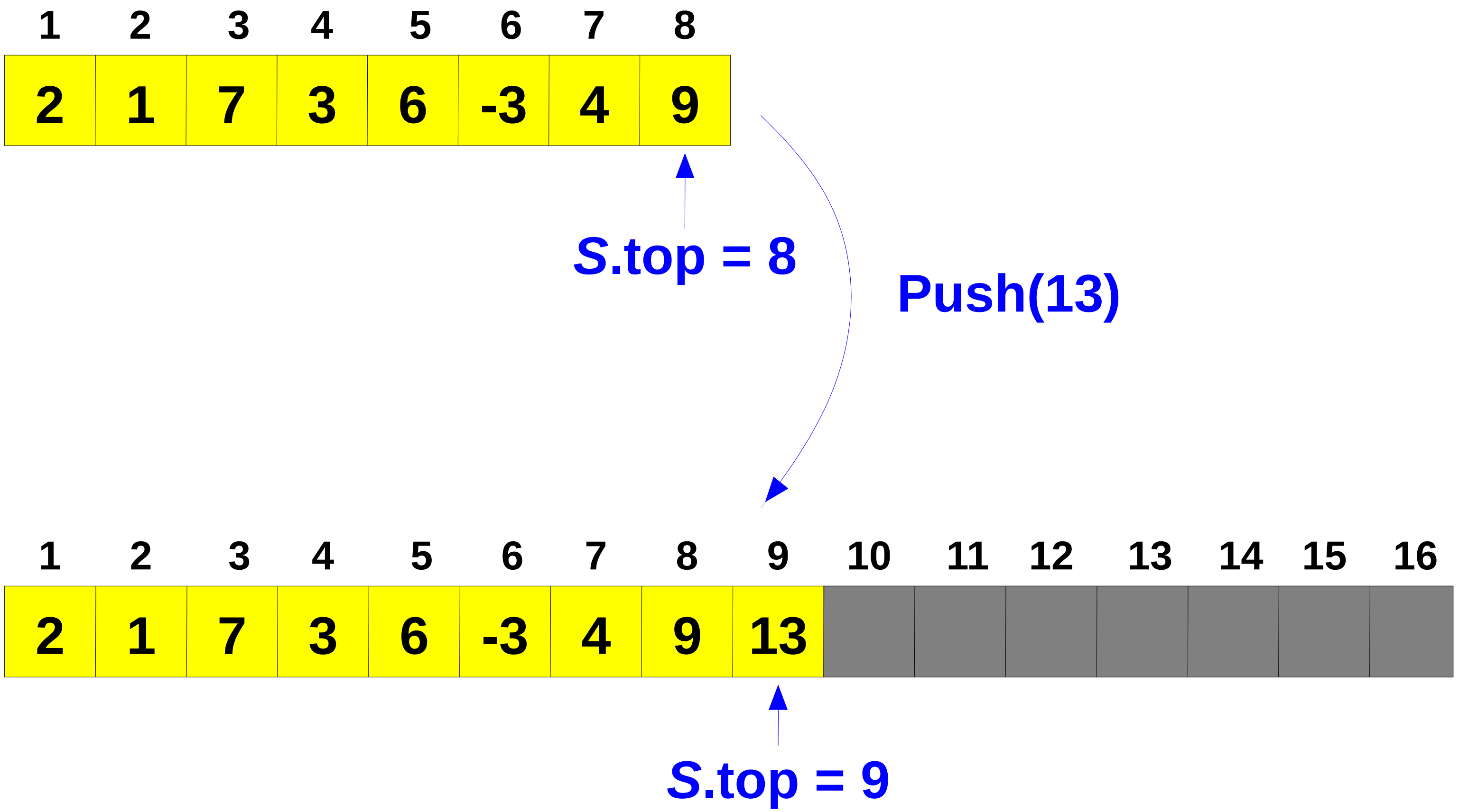

```
STACK-EMPTY(S)
if S.top == 0
    return TRUE
else return FALSE
```

```
PUSH(S, x)
S.top = S.top + 1
S[S.top] = x
```

```
POP(S)
if STACK-EMPTY(S)
    error "underflow"
else S.top = S.top - 1
    return S[S.top + 1]
```

Stack-Empty, Push, Pop : $O(1)$ tid

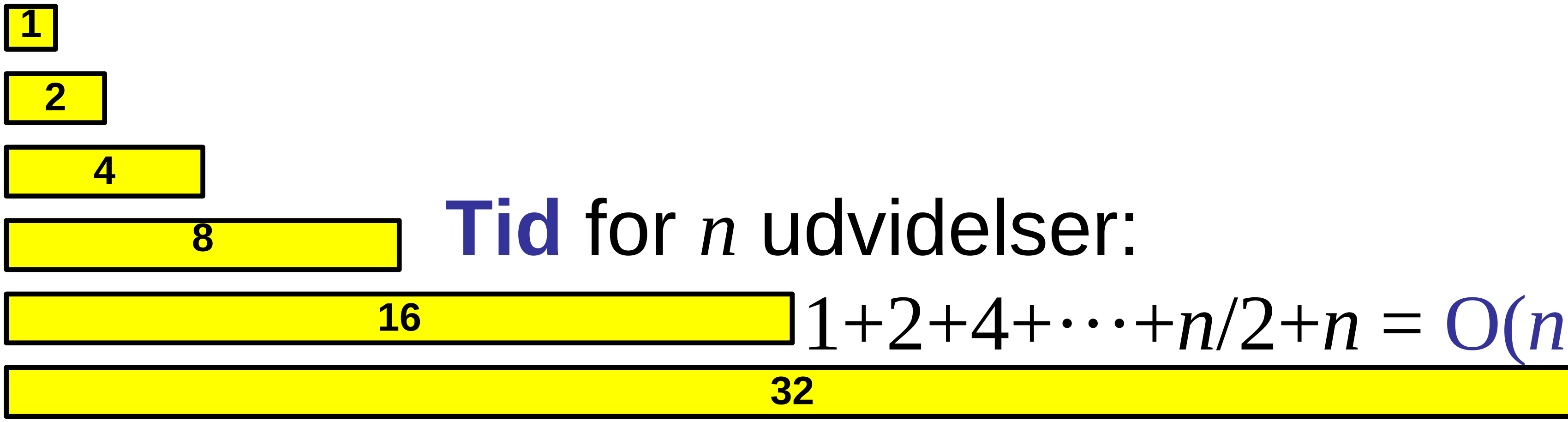
Stak : Overløb



Array fordobling : $O(n)$ tid

Array Fordobling

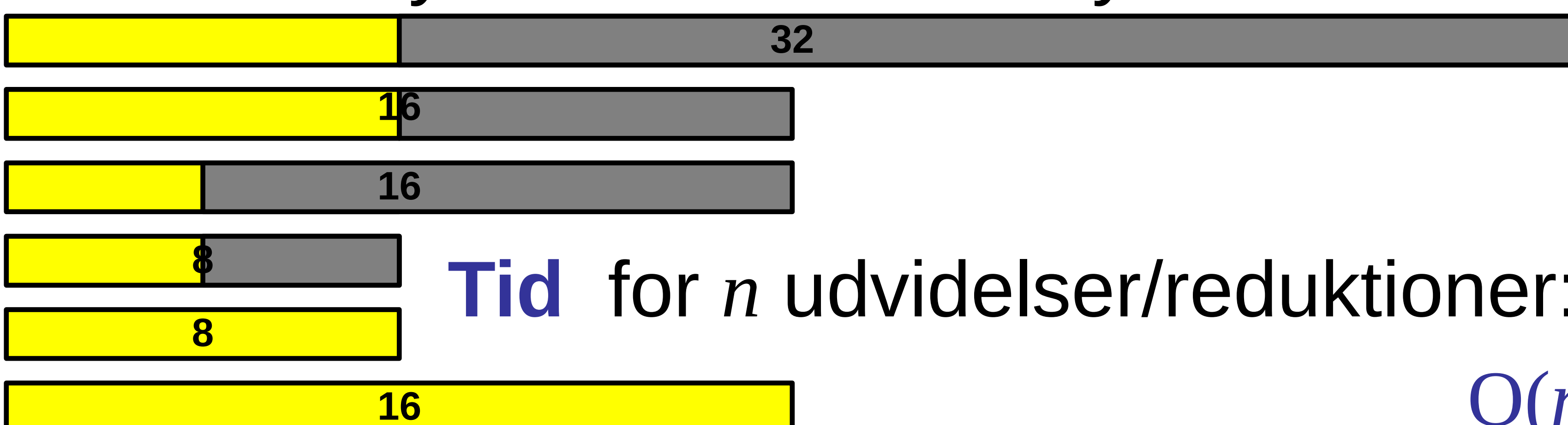
Fordoble arrayet når det er fuld



Tid for n udvidelser:

$$1+2+4+\cdots+n/2+n = O(n)$$

Halver arrayet når det er <1/4 fyldt



Tid for n udvidelser/reduktioner:

$$O(n)$$

Array Fordobling + Halvering

– en generel teknik

Tid for n udvidelser/reduktioner er $O(n)$

Plads $\leq$ 4 · aktuelle antal elementer

Array implementation af Stak:

n **push og pop operationer tager** $O(n)$ **tid**

Analyse teknik ønskes...

Krav

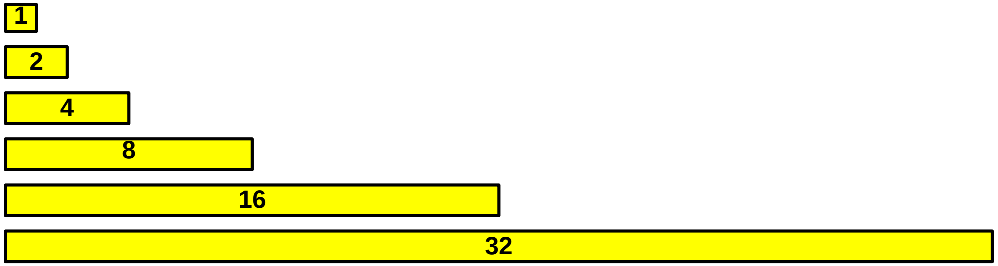
- Analysere **worst-case** tiden for en **sekvens** af operationer
- Behøver kun at analysere den **enkelte operation**

Fordel

- Behøver **ikke** overveje andre operationer i sekvens og deres **indbyrdes påvirkninger**
- Gælder for alle sekvenser med de givne operationer

Intuition

- Der findes "**gode**"/"**balancerede**" tilstande og "**dårlige**"/"**ubalancerede**"
- At komme fra en "**dårlig**" tilstand til en "**god**" tilstand er **dyrt**
- Det tager mange operationer fra en "**god**" tilstand før man er i en "**dårlig**"
- For de (mange) **billige** operationer "betaler" vi lidt ekstra for senere at kunne lave en **dyr** operation næsten **gratis**



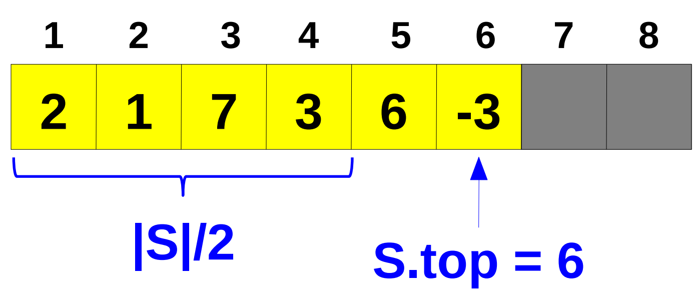
Amortiseret Analyse

- **1 €** kan betale for $O(1)$ **arbejde**
- En operation der tager tid $O(t)$ koster *t* €
- Hvornår vi betaler/sparer op er ligegyldigt – bare pengene er der når vi skal bruge dem!
- Opsparing = Potentiale = Φ
- Vi kan ikke låne penge, dvs. vi skal spare op før vi bruger pengene, $\Phi \geq 0$
- Amortiseret tid for en operation = hvad vi er **villige** til at betale – men vi skal have råd til operationen!
- Brug **invarianter** til at beskrive sammenhængen mellem **opsparingen** og **datastrukturens tilstand**

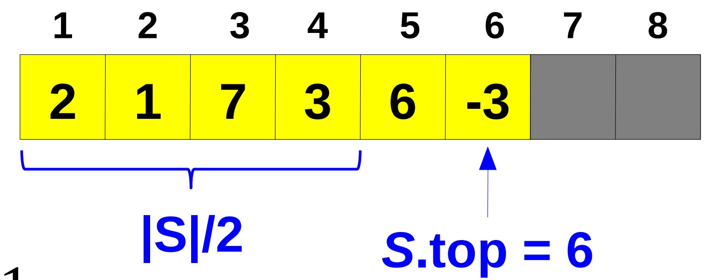
Eksempel: Stak

- En **god** stak er halv fuld – kræver ingen opsparing
- Invariant : $\Phi = 2 \cdot |\, S.top - |S|/2 \,|$
- Antag: 1 € per element indsættelse/kopiering
- Amortiseret tid per push: 3 **€ ?**

  (har vi altid penge til at udføre operationen?)
- Hvis ja: n push operationer koster $\leq 3n$ €



Eksempel: Stak
Push = Amortiseret 3€



- Push uden kopiering:
  - Et nyt element : **1 €**
  - $||S|/2\text{-top}[S]|$ vokser med højst 1, så invarianten holder hvis vi sparer **2 €** op
  - Amortiseret tid: $1+2 =$ **3 €**
- Push med kopiering
  - Kopier S: **$|S|$ €**
  - Indsæt nye element: **1 €**
  - Φ før = $|S|$, Φ efter = 2, dvs **$|S|$-2 € frigives**
  - Amortiseret tid: $|S|+1-(|S|-2) =$ **3 €**

Invariant: $\Phi = 2\cdot|\,S.\text{top}-|S|/2\,|$

Amortiseret Analyse

- Teknik til at argumenter om **worst-case** tiden for en sekvens af operationer

- Behøver kun at analysere operationerne enkeltvis

- **Kunsten**: Find den rigtige invariant for Φ

Eksempel: Rød-Sorte Træer

Insert(x)
=
Søgning ← O(log n)
+
Opret nyt rødt blad ← O(1)
+
Rebalancering ← # transitioner

transitioner = amortiseret O(1)

Φ = # røde knuder

Korollar: Indsættelse i rød-sorte træer tager amortiseret O(1) tid, hvis indsættelsespositionen er kendt