DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12 (tolv)
Eksamensdag: Fredag den 7. august 2009, kl. 9.00-11.00
Eksamenslokale: Åbogade 34, Benjamin bygningen, indgang B
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort ____________________

Navn ____

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Datalogisk Institut
Aarhus Universitet

Fredag den 7. august 2009, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge ét svar ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt $v\,\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max\left\{0\,,\,\frac{s}{n}\right\}\;\cdot\;v\,\%$$

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 1 (4 %)

	Ja	Nej
$n + n^3$ er $O(4n^2)$?	☐	☐
$n^{2/3}$ er $O(n^{1/3})$?	☐	☐
n^3 er $O(n^2 \cdot \log n)$?	☐	☐
$\sqrt{n}$ er $O((\log n)^2)$?	☐	☐
$7n$ er $\Omega(n^7)$?	☐	☐

Opgave 2 (4 %)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O-notationen (bemærk at $\log n$ betegner totals logaritmen):

$$n^2$$
$$(\log n)^2$$
$$\sqrt{2}^{\log n}$$
$$2^n$$
$$n/\log n$$

Svar: ______________________________

Opgave 3 (4 %)

Antag $f(n), f_1(n), f_2(n), g(n), g_1(n)$ og $g_2(n)$ er heltallige positive ikke-aftagende funktioner. Hvilke af følgende udsagn er sande?

	Ja	Nej
$f(n) = O(g(n)) \implies g(n) = O(f(n))$?	☐	☐
$f(n) = \Omega(g(n)) \implies f(n) = O(g(n))$?	☐	☐
$f(n) = O(g(n)) \implies g(n) = \Omega(f(n))$?	☐	☐
$f_1(n) = O(g_1(n)) \wedge f_2(n) = O(g_2(n)) \implies f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$?	☐	☐
$f_1(n) = O(g_1(n)) \wedge f_2(n) = O(g_2(n)) \implies f_1(n) - f_2(n) = O(g_1(n) - g_2(n))$?	☐	☐

Opgave 4 (4 %)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O-notation.

Algoritme Loop1(n)
  $x \leftarrow 1$
  for $i \leftarrow 1$ **to** n
    for $j \leftarrow i$ **to** n
      for $k \leftarrow i$ **to** j
        $x \leftarrow x + 1$

Algoritme Loop2(n)
  $x \leftarrow 1$
  for $i \leftarrow 1$ **to** n
    for $j \leftarrow 1$ **to** n
      $x \leftarrow x + 1$
    for $k \leftarrow 1$ **to** n
      $x \leftarrow x + 1$

Algoritme Loop3(n)
  $i \leftarrow 1$
  while $i \leq n$ **do**
    $i \leftarrow 3 * i$

Svar Loop1: ______________________

Svar Loop2: ______________________

Svar Loop3: ______________________

Opgave 5 (4 %)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførselstiden som funktion af n i O-notation.

Algoritme Loop1(n)
  if $n \leq 0$ **then**
    return 1
  else
    return Loop1($n - 1$) + Loop1($n - 1$)

Algoritme Loop2(n)
  $x \leftarrow 0$
  $i \leftarrow 1$
  $s \leftarrow 0$
  while $i \leq n$ **do**
    for $k \leftarrow 1$ **to** s
      for $\ell \leftarrow 1$ **to** k
        $x \leftarrow x + 1$
    $s \leftarrow s + i$
    $i \leftarrow i + 1$

Algoritme Loop3(n)
  $i \leftarrow 1$
  $s \leftarrow 0$
  while $s \leq n$ **do**
    $j \leftarrow 1$
    while $j \leq i$ **do**
      $j \leftarrow 2 * j$
    $s \leftarrow s + i$
    $i \leftarrow i + 1$

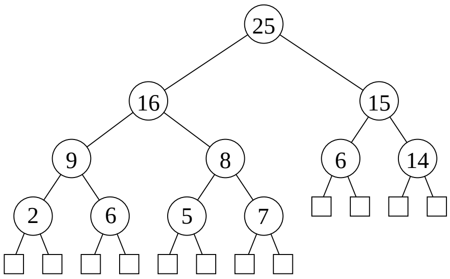
Svar Loop1: ______________________

Svar Loop2: ______________________

Svar Loop3: ______________________

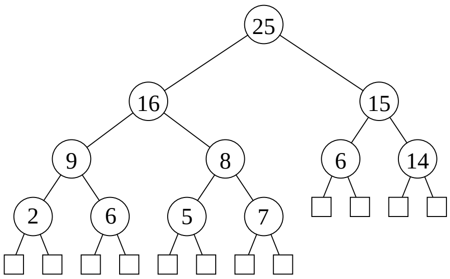
Opgave 6 (4 %)

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter indsættelse af elementet 42.



Svar: ______________________________

Tegn hvordan nedenstående binære max-heap ser ud efter en heap-extract-max operation.



Svar: ______________________________

Opgave 7 (4 %)

Tegn den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

Svar: ______________________________

Opgave 8 (4 %)

Angiv hvordan nedenstående array ser ud efter anvendelsen af build-max-heap for arrayet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	1	3	5	7	9

Svar: ______________________________

Opgave 9 (4 %)

Betragt COUNTING-SORT anvendt på nedenstående liste af tal fra $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Angiv arrayet C efter tallene er blevet sorteret med COUNTING-SORT.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	1	0	2	4	3	9	2	3	4	5	3

Svar: ______________________________

Opgave 10 (4 %)

Angiv resultatet af at anvende PARTITION(A,2,11) på nedenstående array.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	8	16	1	6	2	17	13	4	15	3	5	18	9	11	24	12	14	10	7	22

Svar: ______________________________

Opgave 11 (4 %)

Angiv den asymptotiske tid for quicksort på et input af størrelse n.

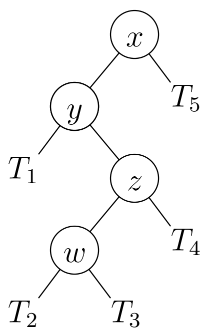
Bedste tid ? Svar: ______________

Værste tid ? Svar: ______________

Forventede tid for et tilfældigt input ? Svar: ______________

Opgave 12 (4 %)

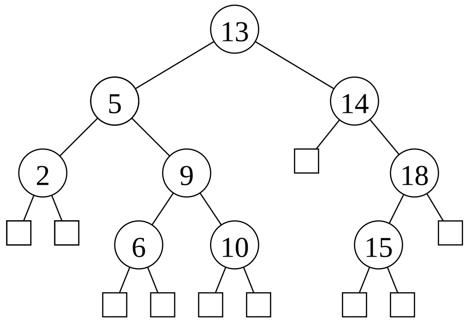
Nedenstående angiver en del af et søgetræ. Angiv x, y, z, og w i sorteret voksende rækkefølge.



Svar: ______________________________

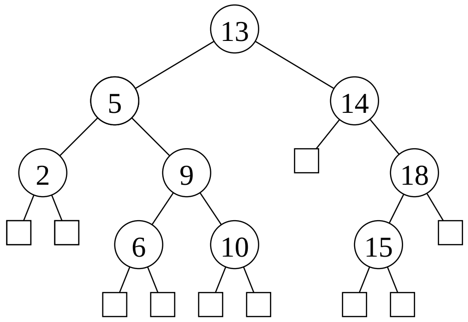
Opgave 13 (4 %)

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 7.



Svar: ______________________________

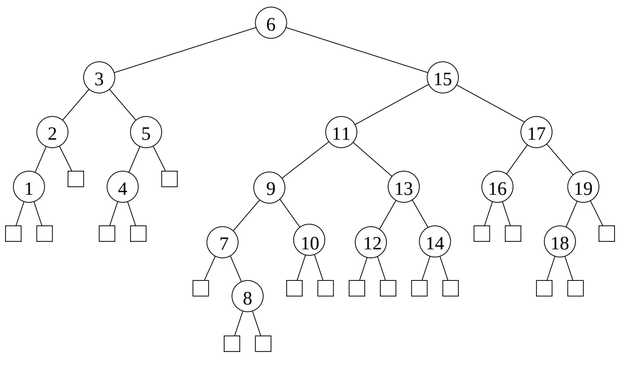
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 5.



Svar: ______________________________

Opgave 14 (4 %)

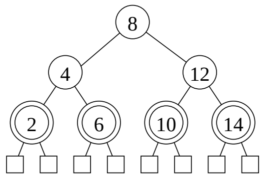
Angiv hvorledes knuderne i nedenstående binære søgetræ kan farves røde og sorte, således at det resulterende træ er et lovligt rød-sort træ.



Svar: ______________________________

Opgave 15 (4 %)

Tegn hvordan nedenstående rød-sorte træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder) ser ud efter indsættelse af elementet 9.



Svar: ______________________

Opgave 16 (4 %)

Angiv alle mulige binære max-heaps for mængden $\{1, 2, 3, 4\}$.

Svar: ______________________

Opgave 17 (4 %)

Tegn en hashtabel hvor der anvendes kædede lister til at håndtere kollisioner, når hashfunktionen er $h(k) = 2k \bmod 7$ og der indsættes elementerne 5, 2, 7, 9, 8, 15, og 12 i den givne rækkefølge.

Svar: ______________________

Opgave 18 (4 %)

Tegn hvordan en hashtabel der anvender *linear probing* ser ud efter at elementerne 8, 2, 5, 3, 12, 1, og 13 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er $h(k) = 3k \bmod 10$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Svar: ______________________________

Opgave 19 (4 %)

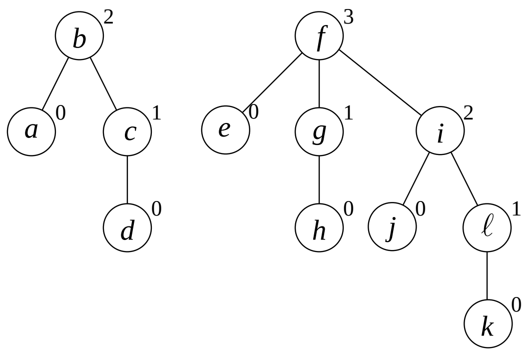
Tegn hvordan en hashtabel der anvender *quadratic probing* ser ud efter at elementerne 9, 3, 14, 0, 1, og 12 indsættes i den givne rækkefølge, når hashfunktionen er $h(k, i) = 2k + 3i + 2i^2 \bmod 11$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Svar: ______________________________

Opgave 20 (4 %)

Angiv den resulterende union-find struktur efter $\textsc{Union}(c, j)$, når der anvendes union-by-rank og stikomprimering (tallene angiver knudernes rang).



Svar: ______________________________

(Opgavesættet fortsætter)

Transitionssystem Count-Down
Konfigurationer: $\{[k,i] \mid \text{heltal } k,i \wedge k \geq 0 \wedge i \geq 0\}$

$$[k,i] \triangleright [k-2^i, i] \quad \textbf{if} \quad k \geq 2^i$$
$$[k,i] \triangleright [k, i-1] \quad \textbf{if} \quad k < 2^i \wedge i > 0$$

Opgave 21 (4 %)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem Count-Down. Startkonfigurationen $[k_0, i_0]$ antages at opfylde $2^{i_0+1} > k_0 \geq 2^{i_0}$.

	Ja	Nej
$k \geq 2^i$	☐	☐
$k \geq i$	☐	☐
$k + 2^i = k_0 + 2^{i_0}$	☐	☐
$2^{i+1} > k \geq 2^i$	☐	☐
$k^2 \geq i$	☐	☐

Opgave 22 (4 %)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem Count-Down.

	Ja	Nej
$\mu(k,i) = k + i$	☐	☐
$\mu(k,i) = k + 2^i$	☐	☐
$\mu(k,i) = 2^k + 2^i - i$	☐	☐
$\mu(k,i) = 2^{k+i} - i$	☐	☐
$\mu(k,i) = i \cdot k$	☐	☐

Algoritme Cubed(n)
Inputbetingelse : heltal $n \geq 0$
Outputkrav : $k \leq n^3$
Metode : $i \leftarrow 0$
$j \leftarrow 0$
$k \leftarrow 0$
$\{I\}$ **while** $i < n$ **do**
$k \leftarrow k + j + j + j + i + i + i + 1$
$j \leftarrow j + i + i + 1$
$i \leftarrow i + 1$

Opgave 23 (4 %)

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme Cubed.

	Ja	Nej
$k = n^3$	☐	☐
$j = i^2$	☐	☐
$k = i^3$	☐	☐
$i \leq j \leq k$	☐	☐
$j \leq n$	☐	☐

Opgave 24 (4 %)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme Cubed.

	Ja	Nej
$\mu(n, i, j, k) = n - i$	☐	☐
$\mu(n, i, j, k) = n^3 - k$	☐	☐
$\mu(n, i, j, k) = n^2 - j$	☐	☐
$\mu(n, i, j, k) = i$	☐	☐
$\mu(n, i, j, k) = (n - i)^2$	☐	☐

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 25 (4 %)

Givet et heltal n, beregner nedenstående algoritme den binære heltals logaritme af n, dvs.

$$\text{intlog}(n) = \max\{i \mid 2^i \leq n \ \wedge \ i \text{ er et heltal}\}$$

For at vise gyldigheden af algoritmen skal I_i og I_r være invarianter omkring variablerne i og r. Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke). Det antages at n ikke kan ændres af algoritmen.

Algoritme intlog(n)
Inputbetingelse : heltal $n \geq 1$
Outputkrav : $i = \text{intlog}(n)$
Metode : $r \leftarrow 1$
$i \leftarrow 0$
$\{I_r \ \wedge \ I_i\}$ **while** $r \leq n$ **do**
  $r \leftarrow r + r$
  $i \leftarrow i + 1$
$i \leftarrow i - 1$

Svar I_i: ____________________

Svar I_r: ____________________

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ: ____________________