

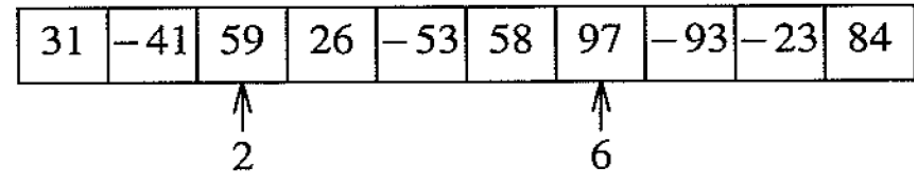
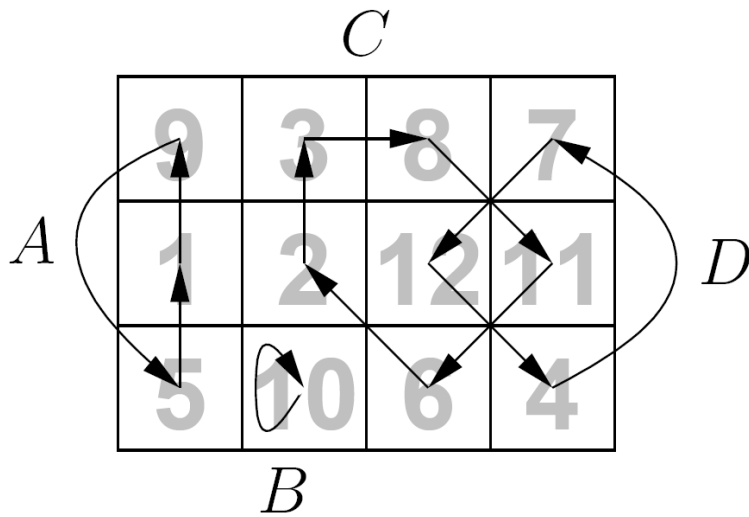
Algoritmer og Datastrukturer 1

Gerth Stølting Brodal

Analyseværktøjer [CLRS, 1-3.1]



Eksempler på en beregningsprocess...

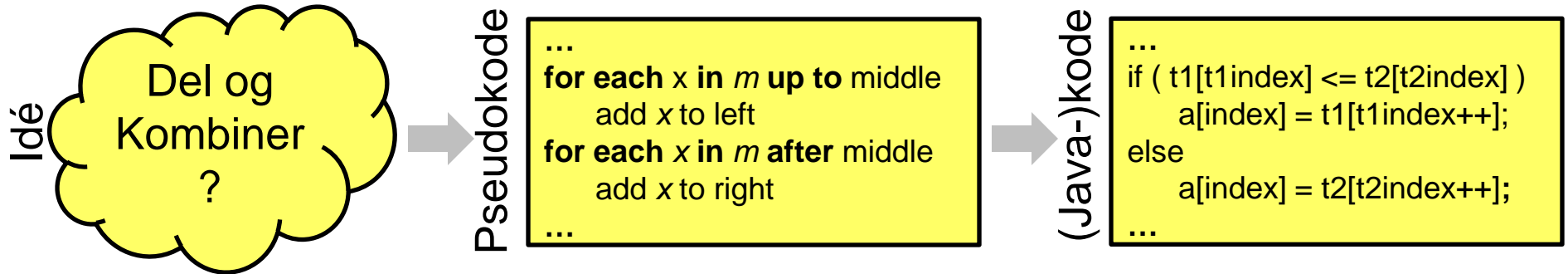


Maximum delsum

Puslespil ved ombytninger

**Hvad er udførelstiden
for en algoritme?**

Fra Idé til Programudførelse



↓ Compiler

Mikrokode

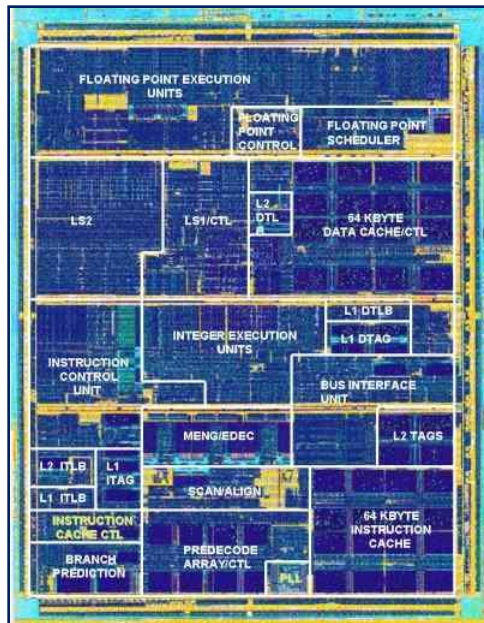
Virtuel hukkomelse/
TLB

L1, L2,... cache

Branch Prediction

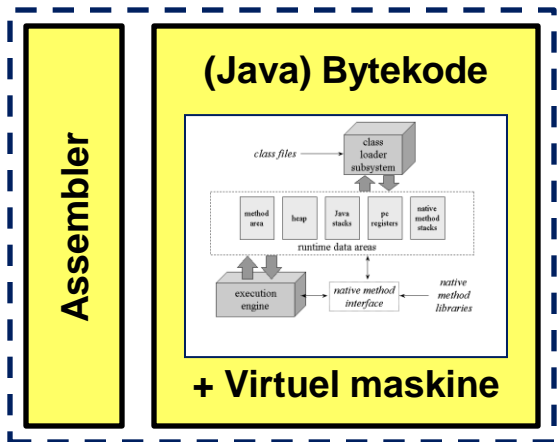
Pipelining

...



← Program-udførelse

Maskinkode



Maskiner har forskellig hastighed...

Maskine	Tid (sek)
camel19	8.9
molotov	10.2
harald	26.2
gorm	7.8

Tid for at sortere linierne i en 65 MB web log på forskellige maskiner på Institut for Datalogi

Idé:

Argumenter om algoritmer uafhængig af maskine

Design af Algoritmer

Korrekt algoritme

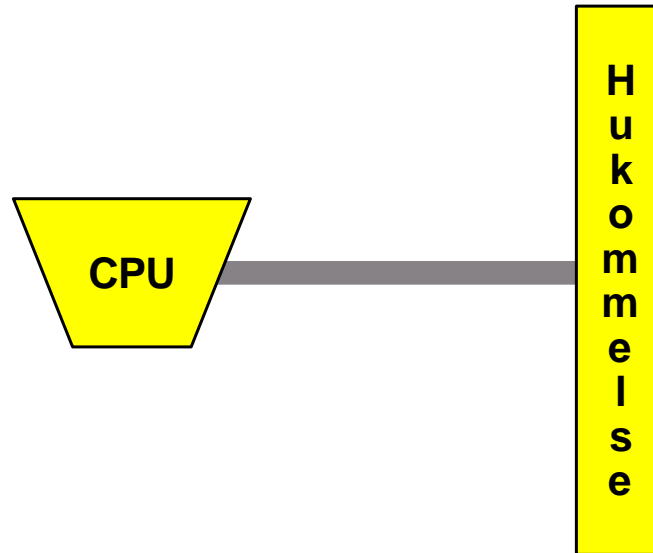
- algoritmen **standser** på alle input
- output er det **rigtige** på alle input

Effektivitet

- Optimer algoritmerne mod at bruge **minimal** tid, plads, additioner,... eller **maximal** parallelisme...
- $\sim n^2$ er bedre end $\sim n^3$: **asymptotisk tid**
- Mindre vigtigt : **konstanterne**
- Resouceforbrug: **Worst-case** eller **gennemsnitlig**?

RAM Modellen

(Random Access Machine)



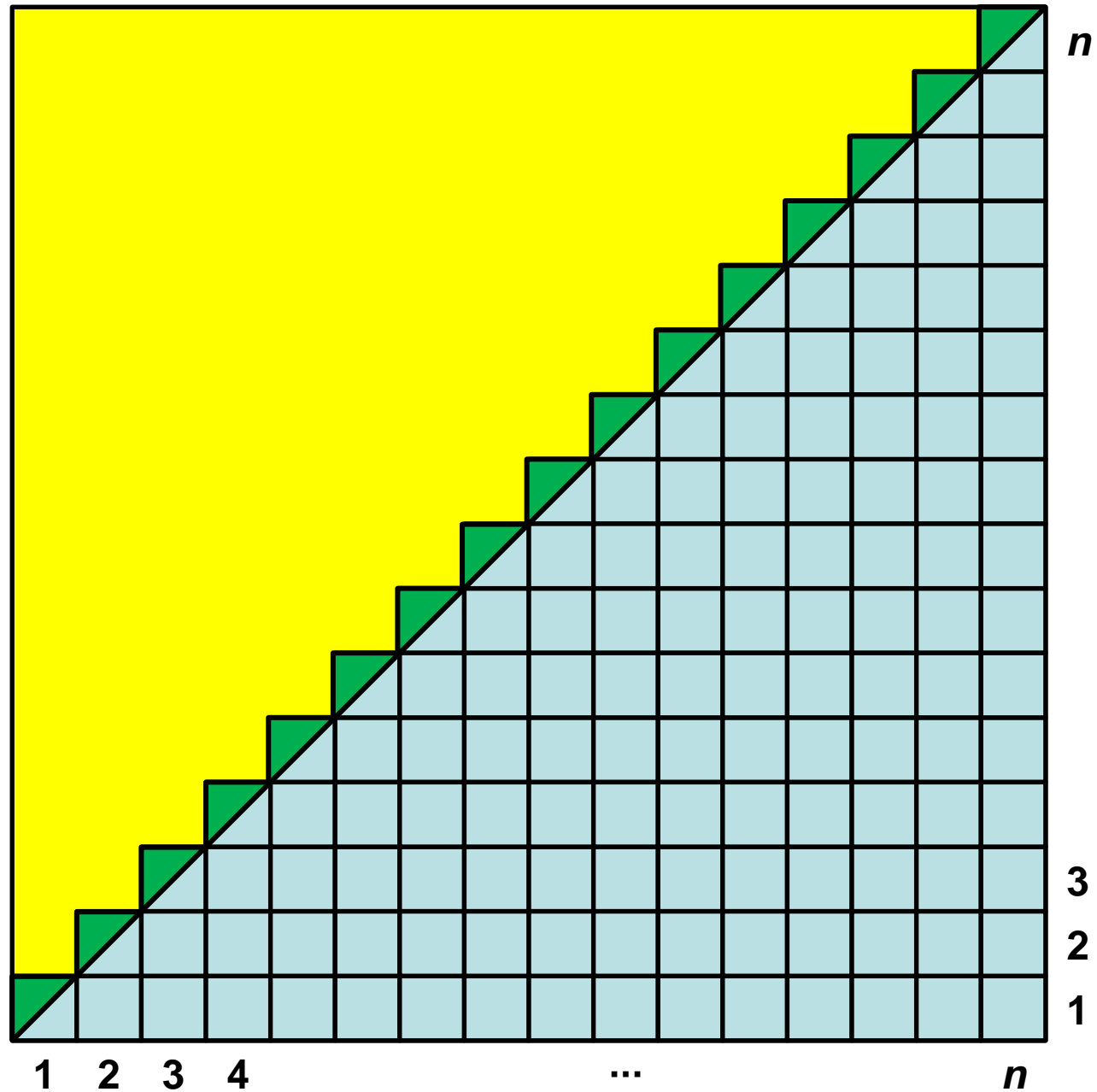
- Beregninger sker i CPU
- Data gemmes i hukommelsen
- Basale operationer tager **1 tidsenhed**:
+, -, *, AND, OR, XOR, **get(i)**, **set(i,v)**, ...
- Et maskinord indeholder **$c \cdot \log n$ bits**

Eksempel: Insertion-Sort

INSERTION-SORT(A)

```
1  for  $j = 2$  to  $A.length$ 
2       $key = A[j]$ 
3      // Insert  $A[j]$  into the sorted sequence  $A[1 .. j - 1]$ .
4       $i = j - 1$ 
5      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
6           $A[i + 1] = A[i]$ 
7           $i = i - 1$ 
8       $A[i + 1] = key$ 
```


$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$



Insertion-Sort (C)

```
insertion(int a[], int N)
{ int i, j, key;

  for(j=1; j < N; j++)
  { key = a[j];
    i = j-1;
    while( i>=0 && a[i] > key )
      { a[i+1] = a[i];
        i--;
      }
    a[i+1] = key;
  }
}
```

```
insertion:
    pushl   %ebp
    movl   %esp, %ebp
    pushl   %edi
    pushl   %esi
    pushl   %ebx
    subl   $12, %esp
    cmpl   $1, 12(%ebp)
    jle    .L3
    movl   8(%ebp), %edx
    xorl   %ebx, %ebx
    movl   8(%ebp), %eax
    movl   $1, -16(%ebp)
    movl   4(%edx), %edx
    addl   $4, %eax
    movl   %eax, -20(%ebp)
    movl   %edx, -24(%ebp)
    .p2align 4,,7
.L6:
    movl   8(%ebp), %ecx
    leal   0(%ebx,4), %esi
    movl   (%ecx,%ebx,4), %eax
    cmpl   -24(%ebp), %eax
    jle    .L8
    movl   %ecx, %edi
    leal   -4(%esi), %ecx
    leal   (%ecx,%edi), %edx
    jmp    .L9
    .p2align 4,,7
.L16:
    movl   (%edx), %eax
    movl   %ecx, %esi
    subl   $4, %edx
    subl   $4, %ecx
    cmpl   -24(%ebp), %eax
    jle    .L8
.L9:
    movl   -20(%ebp), %edi
    subl   $1, %ebx
    movl   %eax, (%edi,%esi)
    jns    .L16
.L8:
    movl   -16(%ebp), %edi
    movl   8(%ebp), %edx
    leal   (%edx,%edi,4), %eax
.L5:
    movl   -24(%ebp), %ecx
    movl   -20(%ebp), %edx
    addl   $1, -16(%ebp)
    movl   -16(%ebp), %edi
    movl   %ecx, (%edx,%ebx,4)
    cmpl   %edi, 12(%ebp)
    jle    .L3
    movl   4(%eax), %edx
    movl   %edi, %ebx
    addl   $4, %eax
    subl   $1, %ebx
    movl   %edx, -24(%ebp)
    jns    .L6
    jmp    .L5
.L3:
    addl   $12, %esp
    popl   %ebx
    popl   %esi
    popl   %edi
    popl   %ebp
    ret
```

Eksempel: Insertion-Sort

- Eksempel på **pseudo-kode**
- Detaljeret analyse – stort arbejde
- Tid: **worst-case** ($\sim n^2$) og **best-case** ($\sim n$) meget forskellige
- Tid: **gennemsnitlige** ($\sim n^2$)
- Hurtigere på \sim sorterede input: **adaptive**

Asymptotisk notation

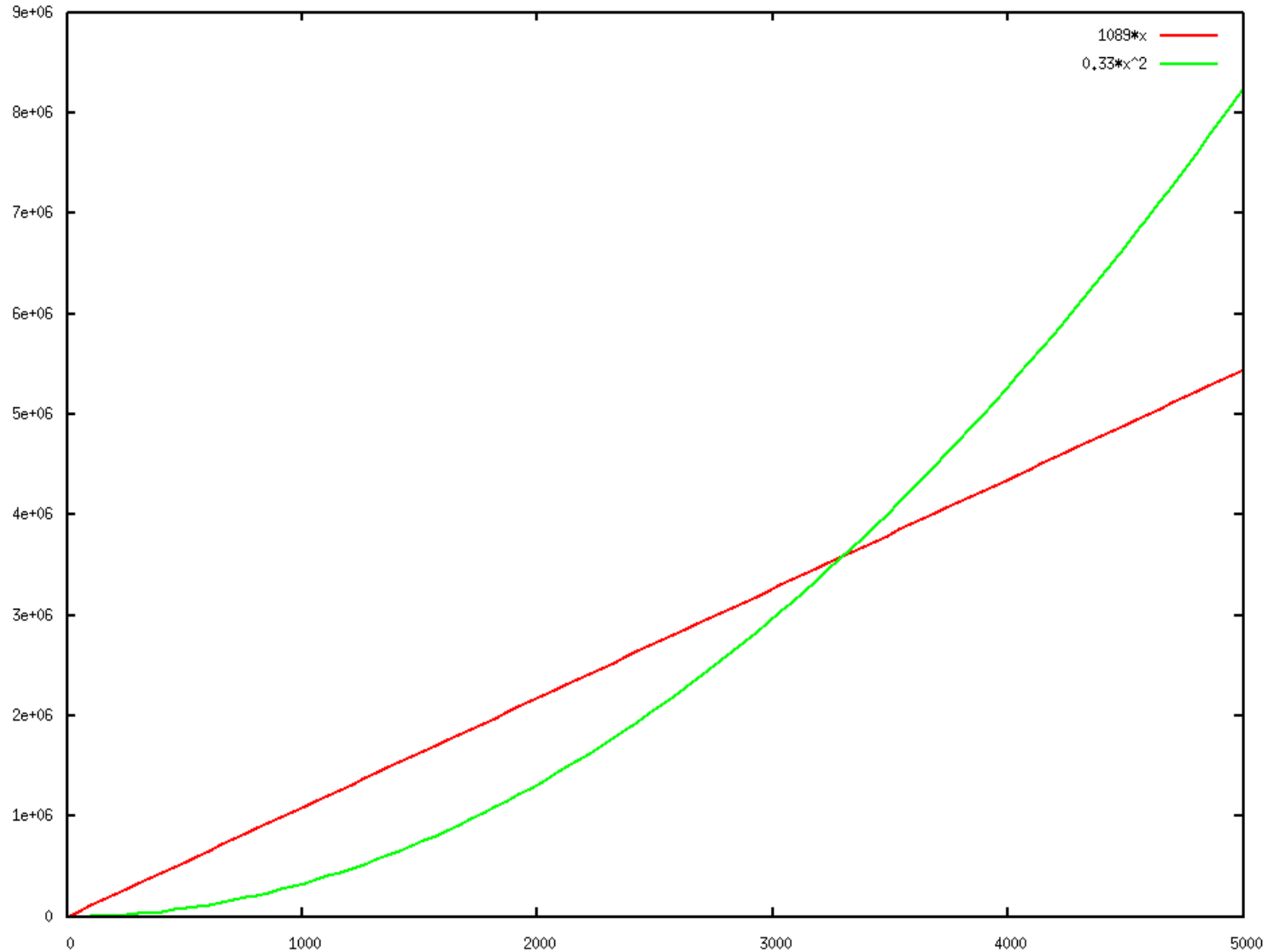
- Grundlæggende antagelse:
 - $\sim n^2$ er bedre end $\sim n^3$
 - Konstanter ikke vigtige
- **Matematisk formel** måde at arbejde med " \sim "
- Eksempler:

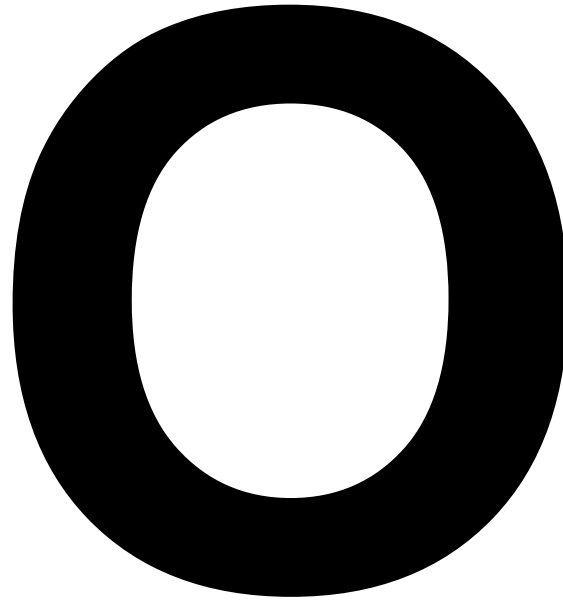
$$87 \cdot n^2 \quad " \leq " \quad 12 \cdot n^3$$

$$1089 \cdot n \quad " \leq " \quad 0.33 \cdot n^2$$

$$7 \cdot n^2 + 25 \cdot n \quad " \leq " \quad n^2$$

$1089 \cdot x$ VS $0.33 \cdot x^2$





- notation

... og vennerne

Ω (store omega)

θ (theta)

ω (lille omega)

o (lille o)

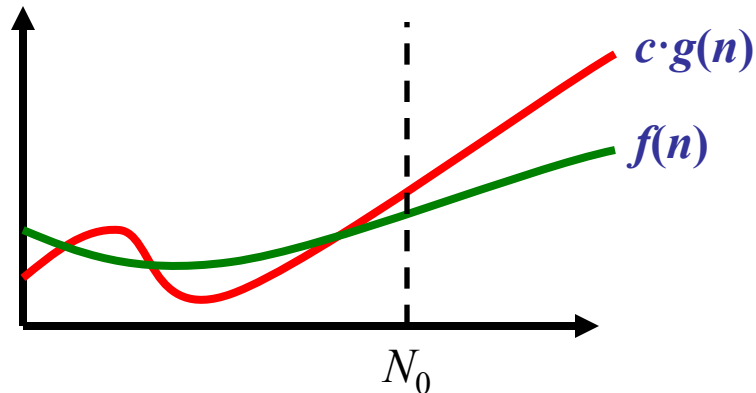
O-notation

Definition: $f(n) = O(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så for alle $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$



Intuitivt: $f(n)$ er "mindre end er lig med" $g(n)$, eller $g(n)$ "dominerer" $f(n)$

Eksempel: Insertion-Sort

INSERTION-SORT(A)

```
1  for  $j = 2$  to  $A.length$ 
2       $key = A[j]$ 
3      // Insert  $A[j]$  into the sorted sequence  $A[1 .. j - 1]$ .
4       $i = j - 1$ 
5      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
6           $A[i + 1] = A[i]$ 
7           $i = i - 1$ 
8       $A[i + 1] = key$ 
```

Tid $O(n^2)$

Eksempler : O - regneregler

$$f(n) = O(g(n)) \rightarrow c \cdot f(n) = O(g(n))$$

$$f_1(n) = O(g_1(n)) \text{ og } f_2(n) = O(g_2(n)) \rightarrow$$

$$f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$$

$$f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$$

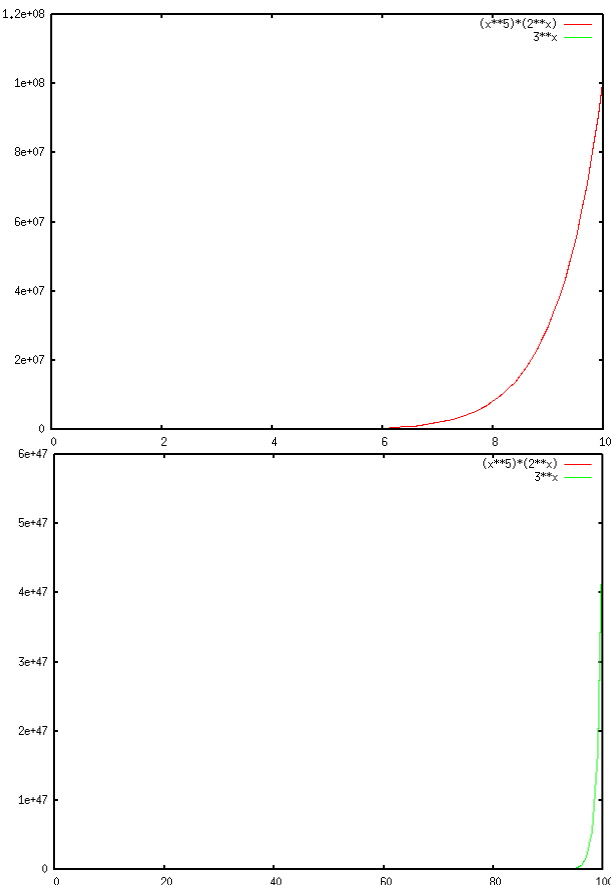
$$c_k \cdot n^k + c_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0 = O(n^k)$$

Eksempler : O

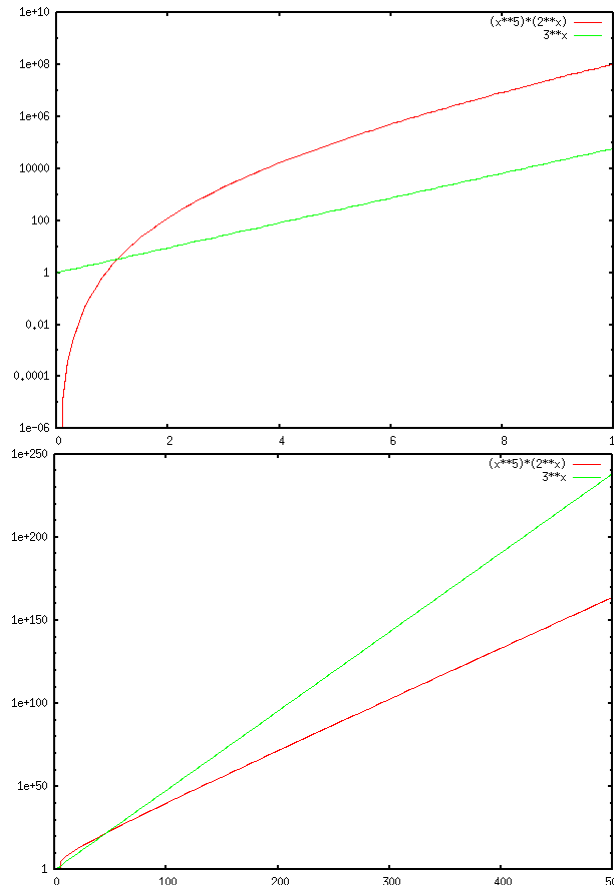
- $3 \cdot n^2 + 7 \cdot n = O(n^2)$
- $n^2 = O(n^3)$
- $\log_2 n = O(n^{0.5})$
- $(\log_2 n)^3 = O(n^{0.1})$
- $n^2 \cdot \log_2 n + 7 \cdot n^{2.5} = O(n^{2.5})$
- $2^n = O(3^n)$
- $n^5 \cdot 2^n = O(3^n)$

Visuel test af $n^5 \cdot 2^n = O(3^n)$?

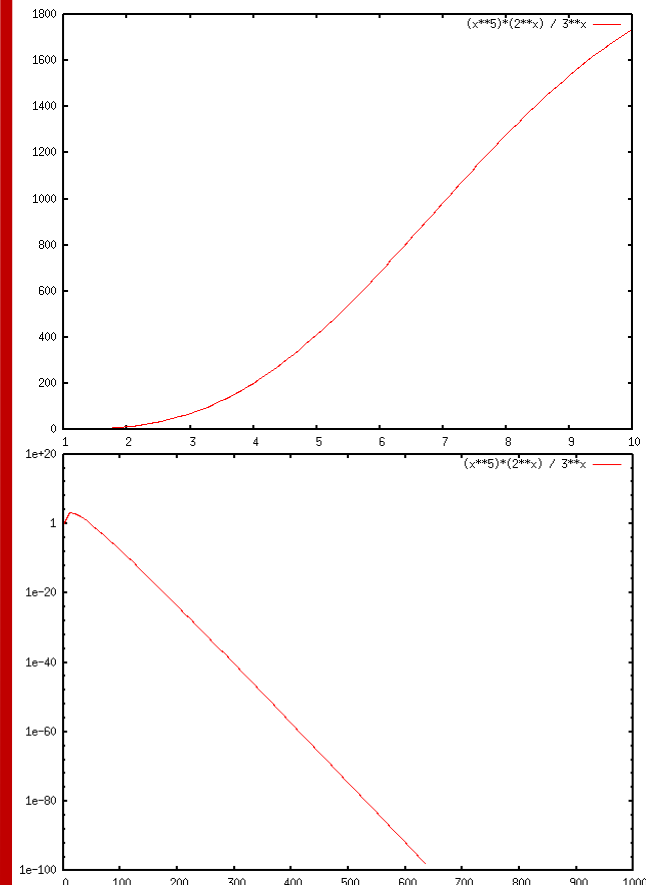
Plot af de to funktioner
– ikke særlig informativ



Plot af de to funktioner
med logaritmisk y-akse
– første plot misvisende



Plot af brøken mellem
de to funktioner
– første plot misvisende



Bevis for $n^5 \cdot 2^n = O(3^n)$

Vis $n^5 \cdot 2^n \leq c \cdot 3^n$ for $n \geq N_0$ for passende valg af c og N_0

Bevis:

$$(5/\log_2(3/2))^2 \leq n \quad \text{for } n \geq 73$$

$$\Downarrow \quad 5/\log_2(3/2) \leq \sqrt{n} \leq n/\sqrt{n} \leq n/\log_2 n \quad \text{da } \sqrt{n} \geq \log_2 n \text{ for } n \geq 17$$

$$\Downarrow \quad 5 \cdot \log_2 n \leq n \cdot \log_2(3/2)$$

$$\Downarrow \quad \log_2(n^5) \leq \log_2(3/2)^n$$

$$\Downarrow \quad n^5 \leq (3/2)^n$$

$$\Downarrow \quad n^5 \cdot 2^n \leq 3^n$$

Dvs. det ønskede gælder for $c = 1$ og $N_0 = 73$.

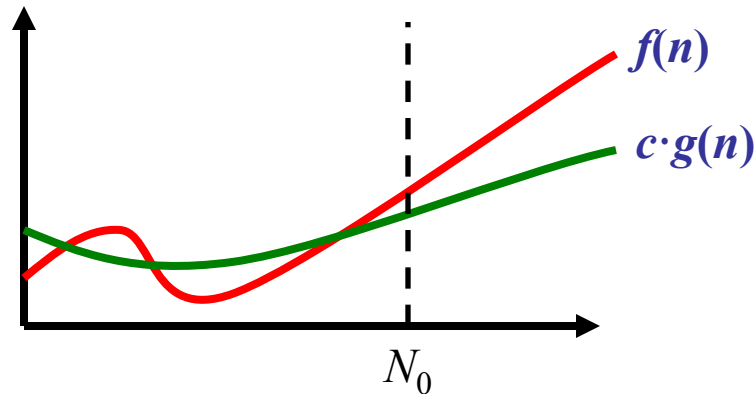


Ω -notation

Definition: $f(n) = \Omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og findes $c > 0$ og N_0 så for alle $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

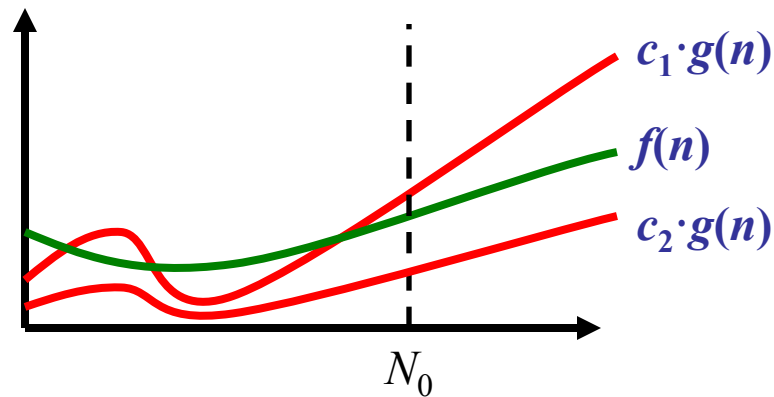


Intuitivt: $f(n)$ er "større end er lig med" $g(n)$, eller $g(n)$ er "domineret af" $f(n)$

θ -notation

Definition: $f(n) = \theta(g(n))$

hvis $f(n) = O(g(n))$ og $f(n) = \Omega(g(n))$



Intuitivt: $f(n)$ og $g(n)$ er "asymptotisk ens"

o-notation (lille o)

Definition: $f(n) = o(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, findes N_0 så **for alle** $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Intuitivt: $f(n)$ er "skarpt mindre end" $g(n)$

ω -notation

Definition: $f(n) = \omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, findes N_0 så **for alle** $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Intuitivt: $f(n)$ er "skarpt større end" $g(n)$

Algoritme Analyse

- RAM model
- O-notation

... behøver ikke at beskrive og analysere algoritmer i detaljer !