

DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 10 (ti)
Eksamensdag: Torsdag den 12. august 2004, kl. 9.00-11.00
Eksamenslokale: Trøjborg-komplekset, Niels Juelsgade 84, lok. 139, 8200 Århus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater)
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1

Datalogisk Institut
Aarhus Universitet

Torsdag den 12. august 2004, kl. 9.00–11.00

Navn _____

Årskort _____

Dette eksamenssæt består af en kombination af små skriftlige opgaver og multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

For multiple-choice-opgaver gælder følgende. Hvert delspørgsmål har præcist et svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge et eller flere svar ved at afkrydse de tilsvarende rubrikker. Et multiple-choice-delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du kun sætter kryds ved det rigtige svar får du 1 point.
- Hvis du sætter a krydser, hvor det ene er det rigtige, får du $1/a$ point.
- Hvis du vælger a krydser, hvor ingen er det rigtige, får du 0 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du $1/k$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en multiple-choice-opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hver med k svarmuligheder, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af multiple-choice-opgaven som:

$$\max \left\{ 0, \frac{s - n/k}{n - n/k} \right\} \cdot v \%$$

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 1 (5 %)

	Ja	Nej
$7n$ er $O(n \log n)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n \cdot \sqrt{n}$ er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$5n^2$ er $O(n \cdot \log n)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\sqrt{n} + n \cdot \log n$ er $O(n \cdot \sqrt{n})$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$3n + 7n^3$ er $O(n^2)$?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 2 (5 %)

Opskriv følgende funktioner efter stigende orden med hensyn til O -notationen:

$$\begin{aligned} &\sqrt{n} \\ &n \cdot (\log n)^2 \\ &n^2 + \log n \\ &3^n \\ &1/n \end{aligned}$$

Svar: _____

Opgave 3 (5 %)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)

```
 $x \leftarrow 0$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
  for  $j \leftarrow i$  downto 1 do  
     $x \leftarrow x + j$ 
```

Algoritme Loop2(n)

```
 $x \leftarrow 0$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
  for  $j \leftarrow 1$  to  $i$  do  
    for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do  
       $x \leftarrow x + i + j + n$ 
```

Algoritme Loop3(n)

```
 $i \leftarrow 1$   
 $j \leftarrow 1$   
while  $j \leq n$  do  
   $i \leftarrow i + 1$   
   $j \leftarrow j + i$ 
```

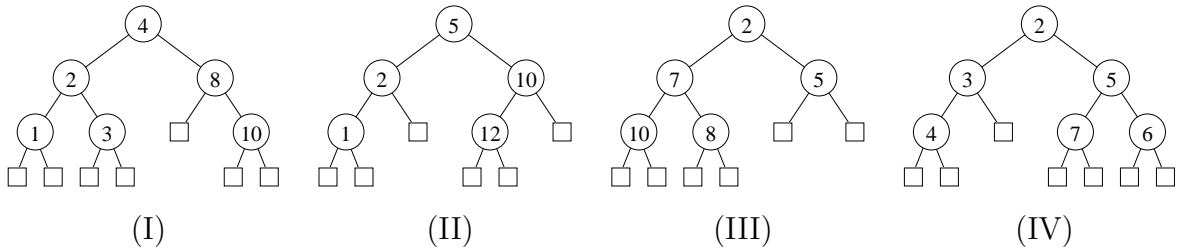
Svar Loop1: _____

Svar Loop2: _____

Svar Loop3: _____

Opgave 4 (5 %)

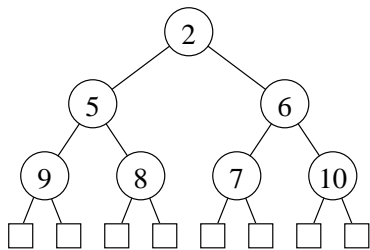
Angiv for hver af nedenstående binære træer om det er en lovlig binær heap eller et lovligt binært søgetræ.



	Heap	Søgetræ	Hverken heap eller søgetræ
(I)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(II)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(III)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(IV)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 5 (5 %)

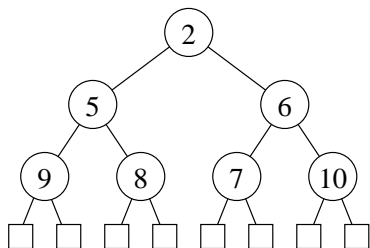
Tegn hvordan nedenstående binære heap ser ud efter indsættelse af elementet 3.



Svar: _____

Opgave 6 (5 %)

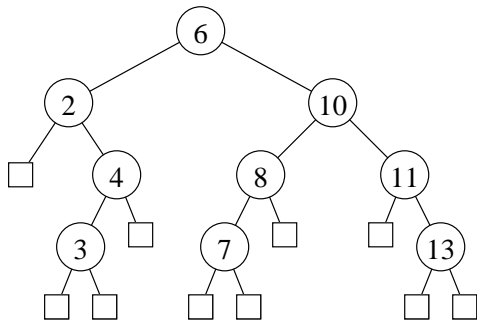
Tegn hvordan nedenstående binære heap ser ud efter en removeMin operation.



Svar: _____

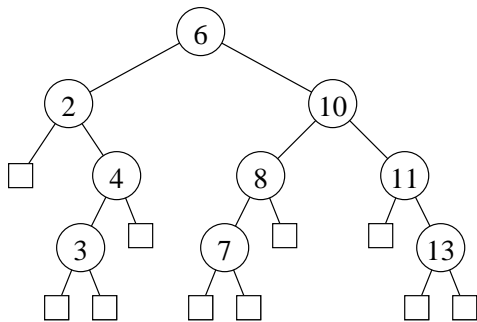
Opgave 7 (5 %)

Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter indsættelse af elementet 9.



Svar: _____

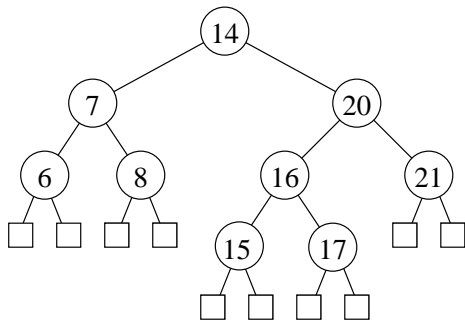
Tegn hvordan nedenstående ubalancerede binære søgetræ ser ud efter slettelse af elementet 6.



Svar: _____

Opgave 8 (5 %)

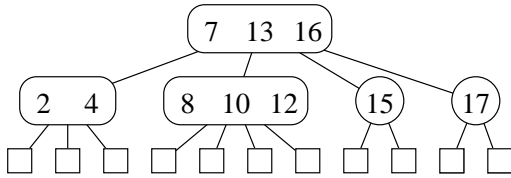
Tegn hvordan nedenstående AVL-træ ser ud efter indsættelse af elementet 18.



Svar: _____

Opgave 9 (5 %)

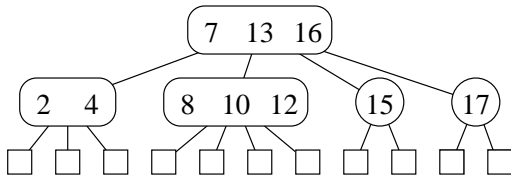
Tegn hvordan nedenstående (2,4) træ ser ud efter indsættelse af elementet 9.



Svar: _____

Opgave 10 (5 %)

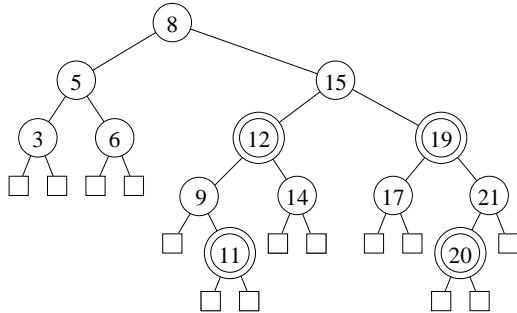
Tegn hvordan nedenstående (2,4) træ ser ud efter slettelse af elementet 15.



Svar: _____

Opgave 11 (5 %)

Nedenstående er et rød-sort træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder). Tegn det korreponderende (2,4) træ.



Svar: _____

Opgave 12 (5 %)

Nedenstående er en hashtabel hvor der er anvendt *linear probing*. Den anvendte hash-funktion er $h(k) = k \bmod 13$. Tegn hvordan hashtabellen ser ud efter at $k = 30$ indsættes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
			29	17	3				22	9	36	

Svar: _____

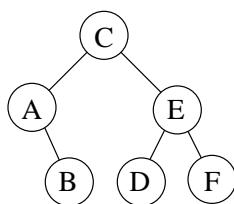
Opgave 13 (5%)

Tegn hvordan hashtabellen for mængden $\{4, 9, 12, 13, 16, 18, 23\}$ ser ud, når der bruges hashfunktionen $h(k) = k \bmod 7$ og der anvendes kædede lister til at håndtere kollisioner.

Svar: _____

Opgave 14 (5%)

Angiv for hver af nedenstående sekvenser om den angiver et preorder, postorder, eller et inorder gennemløb af nedenstående binære træ.



	Preorder	Postorder	Inorder	Hverken preorder, postorder, eller inorder
B D F A E C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C A B E D F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C A E B D F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A B C D E F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B A D F E C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 15 (5%)

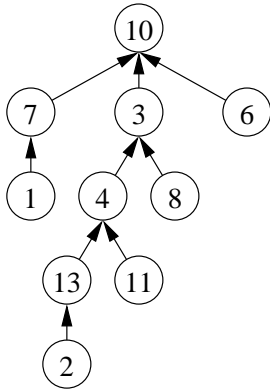
Tegn det entydige træ hvor henholdsvis et preorder og postorder gennemløb giver:

Preoder A B C D E F G
 Postorder B E D F C G A

Svar: _____

Opgave 16 (5%)

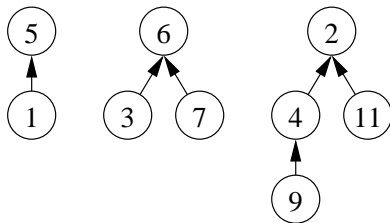
Tegn hvordan nedenstående union-find datastruktur ser ud efter $\text{FIND}(13)$, når der anvendes stikomprimering.



Svar: _____

Opgave 17 (5%)

Tegn hvordan nedenstående union-find datastruktur ser ud efter $\text{UNION}(5,6)$ efterfulgt af $\text{UNION}(5,2)$, når der anvendes union-by-size heuristikken.



Svar: _____

Opgave 18 (5 %)

Algoritme Loop(n)
Inputbetingelse : heltal $n \geq 1$
Outputkrav : –
Metode : $i \leftarrow 1$;
 $j \leftarrow 1$;
 $\{I\}$ **while** $i < n$ **do**
 $i \leftarrow i * 2$;
 $j \leftarrow j + 1$

For hver af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme.

	Ja	Nej
$1 \leq i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1 \leq i \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1 \leq i \leq 2n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i = 2^j$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$i = 2^{j-1}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 19 (5 %)

Algoritme Loop(n)
Inputbetingelse : heltal $n \geq 1$
Outputkrav : –
Metode : $i \leftarrow 1$;
while $i < n$ **do**
 $i \leftarrow 4 * i$

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme.

	Ja	Nej
$\mu(i, n) = n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = -i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = \log n - \log i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, n) = 4n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 20 (5 %)

Nedenstående algoritme beregner $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$. For at vise gyldigheden af algoritmen skal I_i og I_p være invarianter omkring variable i og p . Angiv invarianter hvormed gyldigheden af algoritmen kan bevises (bevis for invarianterne kræves ikke).

```
Algoritme Sum( $A$ )  
Inputbetingelse : heltal  $n \geq 1$   
Outputkrav      :  $p = n!$   
Metode          :  $p \leftarrow 1$ ;  
                  $i \leftarrow 1$ ;  
                  $\{I_i \wedge I_p\}$  while  $i < n$  do  
                    $i \leftarrow i + 1$ ;  
                    $p \leftarrow p * i$ 
```

Svar I_i : _____

Svar I_p : _____

For at kunne bevise at algoritmen terminerer, kræves en passende termineringsfunktion. Angiv en termineringsfunktion (bevis for at termineringsfunktionen har de nødvendige egenskaber kræves ikke).

Svar μ : _____