Opgave 37 Heltalskvadratod

Heltalskvadratroden af et tal $n \geq 0$ er det tal $r \geq 0$, der opfylder

$$r^2 \leq n < (r+1)^2.$$

a) Argumentér for, at følgende algoritme er gyldig og korrekt:

Algoritme: Lineær heltalskvadratrod(n)
Inputbetingelse : $n \geq 0$
Outputkrav : $r^2 \leq n < (r+1)^2$
Metode : $a \leftarrow 0$;
$b \leftarrow n$;
$\{I\}$while $(n < b * b) \vee (n > a * (a+2))$ do
  if $n < b * b$ then
    $b \leftarrow b - 1$
  else
    $a \leftarrow a + 1$;
$r \leftarrow (a+b)/2$

– hvor I er udsagnet $(a^2 \leq n < (b+1)^2) \wedge (a, b \geq 0)$.

b) Ovenstående algoritme kan siges at beskrive en *lineær* søgning efter kvadratroden. Her følger en algoritme, der benytter *binær* søgning:

Algoritme: Binær heltalskvadratrod(n)
Inputbetingelse : $n \geq 0$
Outputkrav : $r^2 \leq n < (r+1)^2$
Metode : $a \leftarrow 0$;
$b \leftarrow n + 1$;
$m \leftarrow (n+1)/2$;
$\{I\}$while $(n < m * m) \vee (n \geq (m+1) * (m+1))$ do
  if $n < m * m$ then
    $b \leftarrow m$;
    $m \leftarrow (a+b)/2$
  else
    $a \leftarrow m + 1$;
    $m \leftarrow (a+b)/2$;
$r \leftarrow m$

– hvor I er udsagnet $(a^2 \leq n < b^2) \wedge (m = (a+b)/2)$.

Argumentér som i a) for, at algoritmen er gyldig og korrekt.

c) Bevis, at følgende er endnu en korrekt måde at beregne heltalskvadratroden på:

Algoritme: Heltalskvadratrod(n)

Inputbetingelse	: $n \geq 0$
Outputkrav	: $r^2 \leq n < (r+1)^2$
Metode	: $r \leftarrow 0;$
	$s \leftarrow 1;$
	$\{I\}$while $s \leq n$ do
	$\quad r \leftarrow r + 1;$
	$\quad s \leftarrow s + 2 * r + 1$

– hvor I er udsagnet $(s = (r+1)^2) \wedge (r^2 \leq n)$.

d) Sammenlign de tre algoritmer. Hvilken er "bedst"? Hvorfor?